

# Mechanik der Kontinua

J. L. van Hemmen

Ein Vorlesungs-Skriptum ausgearbeitet von

C. Reisinger und J.-M. P. Franosch

© J. L. van Hemmen  
2006



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>7</b>
1.1	Der Helmholtz'sche Fundamentalsatz . . . . .	7
1.1.1	Rotationsmatrizen und Drehungen . . . . .	12
1.1.2	Volumenänderung . . . . .	14
1.1.3	Gleitung bzw. Scherung . . . . .	15
1.2	Einige Fakten aus der Vektoranalysis . . . . .	15
1.2.1	div, rot, grad . . . . .	15
1.2.2	Tensoren . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Bewegungsgleichungen</b>	<b>21</b>
2.1	Die Eulergleichungen . . . . .	21
2.2	Massenerhaltung . . . . .	22
2.3	Impulsänderung und das Zweite Newton'sche Gesetz . . . . .	23
2.4	Energieerhaltung . . . . .	31
2.4.1	Inkompressible Flüssigkeiten . . . . .	31
2.4.2	Isentrope Flüssigkeiten . . . . .	32
2.5	Energiestrom(dichte) . . . . .	34
2.6	Beispiel, das zeigt, dass etwas faul ist . . . . .	37
2.7	Zusammenfassung . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Die Navier-Stokes-Gleichungen (1822/1845)</b>	<b>39</b>
3.1	Eigenschaften des Zähigkeitsspannungstensors $\sigma$ . . . . .	39
3.2	Ideale Flüssigkeit als Beispiel . . . . .	44
3.3	Weiteres Beispiel . . . . .	45
3.4	Reynoldssche Zahl (1883) und Ähnlichkeitstheorie (1895) . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Navier-Stokes für inkompressible Flüssigkeiten</b>	<b>47</b>
4.1	Zerlegungssatz (Stokes 1849/Helmholtz 1858) . . . . .	47
4.2	Energiebetrachtung . . . . .	48
4.3	Schlussbetrachtungen . . . . .	50
4.4	Die Stokes-Gleichungen und Stokes' Paradox . . . . .	50
4.5	Hagen (1837)-Poiseuille (1849)-Strömung . . . . .	50
4.6	Deformation eines Festkörpers . . . . .	54

4.6.1	Erdbebenwellen als Beispiel . . . . .	56
4.7	Stokes'sche Bewegung und Widerstandsformel . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Theorie der Wirbel</b>	<b>61</b>
5.1	Der Helmholtzsche Zirkulationssatz . . . . .	61
5.2	Helmholtzsches Theorem . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Zweidimensionale Flüssigkeiten</b>	<b>69</b>
6.1	Allgemeines . . . . .	69
6.2	Zweidimensionaler Eimer mit rotierender Flüssigkeit als Beispiel . . . . .	71
6.3	Übertragung auf drei Dimensionen . . . . .	71
<b>7</b>	<b>Potentialströmungen</b>	<b>73</b>
<b>8</b>	<b>Komplexe Geschwindigkeitsfelder</b>	<b>77</b>
8.1	Einführung . . . . .	77
8.2	Das Lemma von Blasius . . . . .	80
8.3	Das Kutta-Joukowski-Theorem . . . . .	81
8.4	Beispiele . . . . .	83
8.5	Abschließende Bemerkungen und Beispiele . . . . .	86
8.5.1	Rankine Wirbel . . . . .	86
8.5.2	Die Stokes'sche Widerstandsformel in neuem Lichte . . . . .	88
<b>9</b>	<b>Lineare Theorie der Wasserwellen</b>	<b>93</b>
9.1	Randbedingungen für die freie Oberfläche . . . . .	95
9.2	Fortschreitende Wellen im Schwerfeld (gravity waves) . . . . .	96
9.3	Begründung der Plausibilität der Linearisierung . . . . .	100
9.4	Gruppengeschwindigkeit . . . . .	101
9.5	Stehende Wellen im Schwerfeld . . . . .	103
9.6	Wellen in untiefem Wasser . . . . .	105
9.6.1	Lineare Annäherung . . . . .	107
9.6.2	Tsunamis . . . . .	109
<b>10</b>	<b>Kapillarität</b>	<b>113</b>
10.1	Zweidimensionale Mannigfaltigkeit . . . . .	116
10.2	Seifenblase . . . . .	116
10.3	Anwendung auf Wasserwellen . . . . .	120
<b>11</b>	<b>Grenzschicht-Theorie</b>	<b>125</b>
11.1	Die Existenz einer Grenzschicht . . . . .	126
11.2	Lösen der Grenzschicht vom Rand . . . . .	130
11.3	Grenzschichten erzeugen Wirbel . . . . .	130
11.4	Herleitung der Prandtl-Gleichungen . . . . .	131
11.5	Beispiel einer Lösung der Prandtl-Gleichungen . . . . .	132

<b>12 Konforme Abbildungen</b>	<b>133</b>
12.1 Konforme Abbildungen . . . . .	134
12.2 Die Joukowski-Transformation . . . . .	134
<b>13 Stokes' Problem in der Potentialformulierung</b>	<b>143</b>
13.1 Herleitung der Stokes'schen Formel . . . . .	143
13.2 Zur Güte der Näherung . . . . .	147



# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Der Helmholtz'sche Fundamentalsatz

Der allgemeine Ort und die Veränderung eines deformierbaren ausgedehnten Körpers lässt sich für ein hinreichend kleines Volumen desselben und für eine hinreichend kleine Zeitänderung  $\Delta t$  darstellen als Summe

- einer *Translation*
- einer *Rotation*
- und *Deformation* (Dehnung und Stauchung).

Dies hat vorläufig wenig mit Bewegung zu tun, sondern ist ein Theorem zum Verhalten eines *Vektorfeldes*  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$ , das heißt, eine differenzierbare Abbildung des  $\mathbb{R}^3$  in sich selbst.

#### Lemma 1 (Vektorprodukt und antisymmetrische Matrizen)

Eine antisymmetrische  $3 \times 3$ -Matrix lässt sich immer als Vektorprodukt schreiben.

#### Beweis:

Eine Matrix  $A = a_{ij}$  ist nichts anderes als die Darstellung einer linearen Operation bezüglich einer Basis. Wenn diese Darstellung antisymmetrisch ist, gilt  $a_{ij} = -a_{ji}$ , also  $a_{ii} = -a_{ii} = 0$ , und damit:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

sowie

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bx_3 - cx_2 \\ cx_1 - ax_3 \\ ax_2 - bx_1 \end{pmatrix}.$$

Nun definieren wir den Vektor

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

und es gilt für alle  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bx_3 - cx_2 \\ cx_1 - ax_3 \\ ax_2 - bx_1 \end{pmatrix} = A\mathbf{x}.$$

□

Sei nun  $\mathbf{y} := \mathbf{x} + \mathbf{h}$  ein Punkt in der Nähe von  $\mathbf{x}$ , dann kann man  $\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{h})$  in eine Taylor-Reihe entwickeln:

$$u_i(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = u_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^3 \partial_j u_i(\mathbf{x}) h_j + \mathcal{O}(h^2) \quad (1.1)$$

In Vektorschreibweise ergibt sich:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \partial \mathbf{u}|_{\mathbf{x}} \mathbf{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Hier haben wir den Tensor zweiter Stufe  $\partial \mathbf{u}|_{\mathbf{x}} = (\partial_j u_i) := \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  definiert, also eine  $3 \times 3$ -Matrix, die wir im Folgenden in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil zerlegen:

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \underbrace{\left[ \frac{1}{2}(\partial \mathbf{u} + \partial \mathbf{u}^T) \right]}_{=: D \text{ (symmetrisch)}} \mathbf{h} + \underbrace{\left[ \frac{1}{2}(\partial \mathbf{u} - \partial \mathbf{u}^T) \right]}_{=: A \text{ (antisymmetrisch)}} \mathbf{h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (1.2)$$

Beide Matrizen  $D$  und  $A$  sind reell, somit ist die Matrix  $D$  wegen ihrer Symmetrie hermitesch (also selbstadjungiert). Laut (1.2) gilt:

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j) = d_{ij}$$

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (\partial_j u_i - \partial_i u_j) = -a_{ij}$$

und wir können dank des obigen Lemmas schreiben:

$$A\mathbf{h} = \mathbf{a} \times \mathbf{h}, \text{ mit } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

und

$$\left. \begin{aligned} a &= -a_{23} = \frac{1}{2}(\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2) \\ b &= a_{13} = \frac{1}{2}(\partial_3 u_1 - \partial_1 u_3) \\ c &= -a_{12} = \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) \end{aligned} \right\} \mathbf{a} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}$$



Hier haben wir den Nabla-Operator  $\nabla$  eingeführt:

$$\nabla := \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} .$$

Sei nun  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  die Änderung an der Stelle  $\mathbf{x}$  während einer Zeit  $\Delta t$ , d.h.  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\Delta t$ . Dann wäre  $\mathbf{u}(\mathbf{y})$  die Änderung eines benachbarten Punktes  $\mathbf{y}$  und somit, unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung  $h^2$  und höher:

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \underbrace{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\Delta t}_{\mathbf{u}(\mathbf{x})} + \underbrace{\frac{1}{2}(\text{rot } \mathbf{v})\Delta t \times \mathbf{h}}_{\omega \Delta t \times \mathbf{h}} + D\mathbf{h}$$

Translation + Rotation + Deformation

Die Matrix  $D$  heißt *Deformationstensor*. Sie ist mittels einer *orthogonalen* Transformation  $O$  (Orthogonalität  $\Leftrightarrow O^T O = \mathbb{1}$ ) in Diagonalgestalt zu bringen:

$$O^T D O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

**Begründung** (vgl. Quantenmechanik):

- Eigenwert-Problem für den Eigenvektor (EV)  $\mathbf{e}_\lambda$  und dessen Eigenwert (EW)  $\lambda$ :

$$D \underset{\text{EV}}{\mathbf{e}_\lambda} = \lambda \underset{\text{EW}}{\mathbf{e}_\lambda} \quad \Rightarrow \quad (D - \lambda \mathbb{1})\mathbf{e}_\lambda = 0 \text{ und } \mathbf{e}_\lambda \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(D - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

Da die Determinante ein Polynom  $n$ -ten Grades ist, folgt daraus, dass es in der Regel  $n$  Eigenwerte gibt.

- Eigenwerte einer hermiteschen Matrix sind reell:  
Wir gehen vom folgenden Skalarprodukt  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  (kein hoch  $n$ ) aus:

$$\langle \mathbf{e} | \mathbf{f} \rangle := \sum_{i=1}^n e_i^* f_i ,$$

welches *linear* im rechten Glied ist, der Stern  $*$  bedeutet eine komplexe Konjugation.

$$\lambda \langle \mathbf{e}_{\lambda'} | \mathbf{e}_\lambda \rangle = \langle \mathbf{e}_{\lambda'} | D \mathbf{e}_\lambda \rangle = \langle D \mathbf{e}_{\lambda'} | \mathbf{e}_\lambda \rangle = \lambda'^* \langle \mathbf{e}_{\lambda'} | \mathbf{e}_\lambda \rangle ,$$

$D$  hermitesch

so dass

$$(\lambda - \lambda'^*) \langle \mathbf{e}_{\lambda'} | \mathbf{e}_\lambda \rangle = 0$$

gilt. Es ist also entweder  $\lambda - \lambda'^* = 0$ , oder  $\langle \mathbf{e}_{\lambda'} | \mathbf{e}_\lambda \rangle = 0$ .

1. Fall:  $\lambda = \lambda'$

Zuerst betrachten wir den Fall

$$\lambda = \lambda' \Rightarrow (\lambda - \lambda^*) \underbrace{\langle \mathbf{e}_\lambda | \mathbf{e}_\lambda \rangle}_{\neq 0, \text{ da Skalarprodukt pos. definit}} = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda^* \in \mathbb{R}$$

Das heißt, die Eigenwerte sind reell.

2. Fall:  $\langle \mathbf{e}_{\lambda'} | \mathbf{e}_\lambda \rangle = 0$

Setze

$$\langle \mathbf{e}_{\lambda'} | \mathbf{e}_\lambda \rangle := \delta_{\lambda\lambda'}$$

Dies geht immer, da wir

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbf{e}_{\lambda_i}^* \mathbf{e}_{\lambda_i}}_{\in \mathbb{R}^+} = \langle \mathbf{e}_\lambda | \mathbf{e}_\lambda \rangle =: 1$$

setzen können??. Das heißt, die Eigenvektoren sind *orthonormal*. **Bemerkung:** Wenn der Eigenwert  $\lambda$  entartet ist, kann man die Eigenvektoren im Eigenraum, der zu  $\lambda$  gehört, orthogonalisieren.

- Wir bilden die Matrix

$$\begin{aligned} O &:= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \Rightarrow DO = (D\mathbf{e}_1, D\mathbf{e}_2, \dots, D\mathbf{e}_n) = (\lambda_1 \mathbf{e}_1, \lambda_2 \mathbf{e}_2, \dots, \lambda_n \mathbf{e}_n) = \\ &= \begin{pmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{n1} & \cdots & e_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = O \operatorname{diag}\{\lambda_i\} \Rightarrow O^{-1}DO = \operatorname{diag}\{\lambda_i\} \end{aligned}$$

Außerdem ist  $O$  orthogonal:

$$O^T O = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n^T \end{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = \operatorname{diag}\{\langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_i \rangle\} = \mathbb{1} = OO^T \Rightarrow O^T = O^{-1}$$

Damit haben wir die Behauptung gezeigt:

$$O^{-1}DO = O^T DO = \operatorname{diag}\{\lambda_i\}$$

□

Also, eine orthogonale Matrix ist invertierbar,  $O^{-1} = O^T$  und normerhaltend (also längentreu), denn:

$$\|O\mathbf{x}\|^2 = \langle O\mathbf{x} | O\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x} | O^T O\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2$$

□

Damit ergibt sich, dass  $O$  eine Rotation oder eine Rotation zusammen mit einer Inversion ( $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ ) sein muss, was konsistent mit

$$1 = \det(\underbrace{O^T O}_\mathbb{1}) = \det(O^T) \det(O) = \det(O)^2 \Rightarrow \det(O) = \pm 1$$

ist.

Hier haben wir implizit und o.B.d.A. angenommen, dass die Matrix  $O$  reell ist. Man kann  $O$  immer reell wählen, da  $D$  und  $\lambda$ , sowie  $\mathbf{e}_\lambda$  reell sind:

$$D\mathbf{e}_\lambda = \lambda\mathbf{e}_\lambda, \quad D \text{ und } \lambda \text{ reell.}$$

Dass die Eigenvektoren  $\mathbf{e}_\lambda$  reell sind, sieht man folgendermaßen: Sei

$$\mathbf{e}_\lambda = \operatorname{Re}(\mathbf{e}_\lambda) + i\operatorname{Im}(\mathbf{e}_\lambda)$$

(komponentenweise), dann gilt

$$\underbrace{(D - \lambda)\operatorname{Re}(\mathbf{e}_\lambda)}_{=0} + i \underbrace{(D - \lambda)\operatorname{Im}(\mathbf{e}_\lambda)}_{=0} = 0,$$

so dass wir uns o.B.d.A. auf  $\operatorname{Re}(\mathbf{e}_\lambda)$  beschränken können.

Im Folgenden benutzen wir für die normierten (!) Eigenvektoren  $|\mathbf{e}_\lambda\rangle$  die Schreibweise  $|\lambda\rangle$ . Diese bilden im  $\mathbb{R}^n$  eine Basis

$$\Rightarrow |\mathbf{x}\rangle = \sum_{\lambda} c_{\lambda} |\lambda\rangle \Rightarrow \langle \mu | \mathbf{x} \rangle = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \underbrace{\langle \mu | \lambda \rangle}_{\delta_{\mu\lambda}} = c_{\mu}$$

und mit  $\langle \lambda | \mathbf{x} \rangle = c_{\lambda}$  gilt:

$$|\mathbf{x}\rangle = \sum_{\lambda} |\lambda\rangle \underbrace{\langle \lambda | \mathbf{x} \rangle}_{c_{\lambda}} = \mathbb{1} |\mathbf{x}\rangle, \quad \forall x$$

wir erhalten damit eine Zerlegung der Einheit:

$$\mathbb{1} = \sum_{\lambda} |\lambda\rangle \langle \lambda|$$

### Korollar 2 (Spektraldarstellung)

Eine hermitesche, also eine selbstadjungierte Matrix besitzt die *Spektraldarstellung*

$$D = \sum_{\lambda} |\lambda\rangle \lambda \langle \lambda|$$

**Beweis:**

$P_\lambda := |\lambda\rangle\langle\lambda|$  ist ein Projektionsoperator, das heißt

$$P_\lambda^2 = P_\lambda \underbrace{=}_{\langle P_\lambda \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} | P_\lambda \mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}} P_\lambda^*, \text{ wobei } P_\lambda |\mathbf{x}\rangle = |\lambda\rangle\langle\lambda|\mathbf{x}\rangle \underbrace{=}_{\text{nach Def. von } |\lambda\rangle} \mathbf{e}_\lambda \langle \mathbf{e}_\lambda | \mathbf{x} \rangle.$$

Nehmen wir nun einen Eigenvektor  $|\lambda'\rangle$ , so gilt:

$$\left( \sum_\lambda |\lambda\rangle\lambda\langle\lambda| \right) |\lambda'\rangle = \sum_\lambda |\lambda\rangle\lambda \underbrace{\langle\lambda|\lambda'\rangle}_{\delta_{\lambda\lambda'}} = \lambda' |\lambda'\rangle = D |\lambda'\rangle$$

Da die Eigenvektoren eine Basis bilden, ist der Beweis komplett.  $\square$

Bei unserer obigen Zerlegung des Vektorfelds  $\mathbf{u}$  erhalten wir eine Translation (evident), eine Rotation (s.u.) und eine Deformation  $O^T D O$ , die i. A. durch die Transformation  $O^T D O$  in einem anderen Koordinatensystem als das Vektorfeld selbst betrachtet wird, nämlich in dem, in welchem  $D$  die Diagonalgestalt

$$O^T D O = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

annimmt, wobei die  $\varepsilon_i \in \mathbb{R}$  und entweder eine Streckung  $\varepsilon_i > 1$  oder eine Stauchung  $\varepsilon_i < 1$  darstellen.

### 1.1.1 Rotationsmatrizen und Drehungen

Wie wir gesehen haben, ließ sich die Änderung des Positionsfeldes während einer Zeit  $\Delta t$  schreiben als:

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) \underset{\mathbf{x} + \mathbf{h}}{\uparrow} = \underbrace{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \Delta t}_{\mathbf{u}(\mathbf{x})} + \underbrace{\frac{1}{2} [(\text{rot } \mathbf{v}) \Delta t] \times \mathbf{h}}_{\substack{[\boldsymbol{\omega} \Delta t] \times \mathbf{h} \\ \text{Rotation} \\ A\mathbf{h}}} + D\mathbf{h} + \text{Deformation}$$

weil nach dem Lemma eine antisymmetrische Matrix  $A$  sich als Vektorprodukt schreiben lässt - und umgekehrt, wie der Beweis sofort zeigt. Im Klartext, infinitesimale Drehungen ( $\Delta t \rightarrow 0+$ ) entsprechen antisymmetrischen Matrizen. Wie sieht eine Drehung um den Winkel  $\varphi$  aus? O.B.d.A. können wir annehmen, dass die Drehachse  $z$ -Achse ist, so dass:

$$D = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kann man dies auch als Folge infinitesimaler Drehungen darstellen? Das kann man durchaus. Dazu definieren wir uns einen kleinen Drehwinkel  $\Delta\varphi := \varphi/n$ :

$$\mathcal{D}(\varphi/n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \begin{pmatrix} 1 & -\varphi/n & 0 \\ \varphi/n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \underbrace{\frac{\varphi}{n} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{antisymmetrischer infinitesimaler Generator: } \partial_\varphi \mathcal{D}(\varphi)|_{\varphi=0} =: t_z}$$

Mit Hilfe der Reihenentwicklung  $(1 \pm x)^m = 1 \pm mx + \mathcal{O}(x^2)$  lässt sich zeigen:

$$\mathcal{D}(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\mathcal{D}(\varphi/n)]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \mathbb{1} + \frac{\varphi}{n} t_z \right)^n =: e^{\varphi t_z},$$

was anschaulich einer Aneinanderreihung infinitesimaler Drehungen entspricht.

**Interpretation:**

Hier betrachten wir nur die  $x$ - und  $y$ -Komponente, da die  $z$ -Komponente invariant bleibt, das heißt, wir betrachten die  $2 \times 2$ -Matrix:

$$t_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Berechne explizit  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^n}{n!} t_z^n$ .

Beachte dazu:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}$$

Wenn wir die ersten Terme der Reihe anschreiben, erhalten wir damit:

$$\begin{aligned} & \mathbb{1} + \varphi t_z - \frac{\varphi^2}{2!} \mathbb{1} - \frac{\varphi^3}{3!} t_z + \frac{\varphi^4}{4!} \mathbb{1} \pm \dots = \\ & \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} \pm \dots \right) \mathbb{1} + \left( \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} \pm \dots \right) t_z = \mathbb{1} \cos \varphi + t_z \sin \varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Was  $t_z$  auch sein möge,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^n}{n!} t_z^n$  ist für  $n \times n$ -Matrizen *immer* konvergent.
3. Die Matrix  $it_z$  ist eine *hermitesche* Matrix, hier ist:

$$it_z = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_y, \text{ Pauli-Matrix mit } \sigma_y^2 = \mathbb{1}$$

so dass wir die Spektralzerlegung anwenden können:

$$e^{-i\varphi \overbrace{(it_z)}^{\sum_{\lambda} |\lambda\rangle \lambda \langle \lambda| := \phi} \Rightarrow \phi^n = \sum_{\lambda} |\lambda\rangle \lambda^n \langle \lambda|}} = \sum_{\lambda} |\lambda\rangle e^{-i\varphi \lambda} \langle \lambda|$$

**Bemerkung:**  $f(\phi) = \sum_{\lambda} |\lambda\rangle f(\phi) \langle \lambda|$ , mit  $f$  stetig,  $f$  muss also nicht notwendigerweise stetig differenzierbar sein.

Es gibt drei Erzeugende, also infinitesimale Generatoren für die 1, 2 und 3-Richtung:

$$t_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die natürlich alle *antisymmetrisch* sind, so dass für eine Drehung um eine Achse, die parallel zum normierten Vektor  $\hat{\mathbf{n}}$  sei, mit dem Drehwinkel  $\varphi$  gilt:??

$$\text{Erzeugende}(\hat{\mathbf{n}}\mathbf{t}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \mathbb{1} + \frac{\varphi}{n} \hat{\mathbf{n}}\mathbf{t} \right)^n,$$

wobei  $\mathbf{t}$  ähnlich den Pauli-Matrizen der Vektor der Erzeugenden ist:

$$\mathbf{t} := \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}.$$

Außerdem gilt für den Kommutator  $[t_1, t_2] := t_1 t_2 - t_2 t_1$ :

$$[t_1, t_2] = t_3 \text{ und zyklisch}$$

so dass in der Quantenmechanik, mit  $\alpha = 1, 2, 3$  gilt:

$$l_\alpha := i\hbar t_\alpha \quad \Rightarrow \quad [l_1, l_2] = i\hbar l_3 \text{ und zyklisch}$$

mit der Quantenzahl  $l$ ; hier ist  $l=1$  und wir befinden uns damit in  $2l + 1$ , also in 3 Dimensionen.

### 1.1.2 Volumenänderung

Die Translation und die Rotation ändern am Volumen nichts, bleibt nur die Dehnung (Dilatation). Wir betrachten ein quaderförmiges Volumenelement  $\Delta V = a_1 a_2 a_3$  vor der Dehnung und  $\Delta V' = a'_1 a'_2 a'_3$  nach der Dehnung. Wir definieren im Eigensystem des Quaders

$$\Theta := \frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta V} = \prod_{i=1}^3 (1 + \varepsilon_i) - 1 = \underbrace{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}_{\text{Tr}(\varepsilon_d)} + \underbrace{\mathcal{O}(\varepsilon_i^2)}_{\text{wird vernachlässigt}},$$

da

$$\Delta V' = a'_1 a'_2 a'_3 = \prod_{i=1}^3 (1 + \varepsilon_i) a_i.$$

Hier wurde der Tensor  $\varepsilon_d := \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  eingeführt. Eine Spur ist genauso wie eine Determinante unter einer Basistransformation invariant, sie muss also für den Deformationstensor  $D$  aus dem Helmholtz'schen Fundamentalsatz dieselbe sein wie die Spur des soeben definierten Tensors  $\varepsilon_d$ :

$$\text{Tr}(D) = \text{Tr}(O^{-1} \varepsilon_d O) = \text{Tr}(\varepsilon_d O O^{-1}) = \text{Tr}(\varepsilon_d) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

□

Ergo:

$$\Theta \stackrel{\text{Def.}}{=} \text{Tr}(\varepsilon) = \sum_i \varepsilon_{ii} = \sum_i \partial_i u_i = \text{div} \mathbf{u}$$

### 1.1.3 Gleitung bzw. Scherung

Die Verzerrung in  $z$ -Richtung trägt in 1. Ordnung nichts bei!

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &\approx \tan \gamma_1 = \frac{\eta_1' - \eta_0'}{a_1} \rightarrow \partial_1 \eta \\ \gamma_2 &\approx \tan \gamma_2 = \frac{\xi_2' - \xi_0'}{a_2} \rightarrow \partial_2 \xi \end{aligned} \right\} \gamma_1 + \gamma_2 = \partial_1 \xi_2 + \partial_2 \xi_1 = 2\varepsilon_{12}, \text{ usw.}$$

## 1.2 Einige Fakten aus der Vektoranalysis

### 1.2.1 div, rot, grad

#### Definition 3 (Vektor)

Eine Größe heißt *Vektor*, wenn sie sich bei einer *orthogonalen* Transformation

$$\mathbf{x}' = \underset{\substack{\uparrow \\ (\alpha_{ij})}}{O} \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \underbrace{O^T O = O^{-1} O = \mathbb{1}}_{\text{Matrix orthogonal}}$$

des Koordinatensystems ebenso wie der Radiusvektor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  verhält. *Skalar* heißt eine Größe, welche gegenüber dieser Transformation invariant ist.

Damit ergibt sich mit dem Vektorfeld  $\mathbf{A}' = O\mathbf{A}$  für  $\text{div}' \mathbf{A}'$ :

$$\begin{aligned} \text{div}' \mathbf{A}' &= \sum_i \partial_{x'_i} A'_i \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{ik} (\partial_{x_k} A'_i) (\partial_{x'_i} x_k) = \\ &= \sum_{ik} (\partial_{x_k} \alpha_{ij} A_j) (\partial_{x'_i} \alpha_{ik} x'_i) = \sum_{ik} \underbrace{\alpha_{ij} \alpha_{ik}}_{\delta_{jk}} \partial_{x_k} A_j = \sum_j \partial_j A_j = \text{div} \mathbf{A} \end{aligned}$$

Die Divergenz ist also invariant bzgl. einer orthogonalen Transformation.

Wir wollen nun schauen, was  $\text{div}$ ,  $\text{rot}$  und  $\text{grad}$  genau bedeuten. Um  $\text{rot} \mathbf{A}$  für ein gedrehtes Koordinatensystem zu definieren, erinnern wir uns wieder daran, dass wir ein Kreuzprodukt auch als Multiplikation mit einer antisymmetrischen Matrix schreiben können:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Was passiert mit dem Kreuzprodukt unter einer Inversion? Nichts, da sowohl  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{x}$  gespiegelt werden:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{a} \times (-\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} .$$

Ein Kreuzprodukt und damit auch die Rotation  $\text{rot } \mathbf{A}$  ist also invariant bzgl. einer Inversion. Ein „normaler“ Vektor wird aber invertiert. Diesen nennt man deshalb einen *polaren*, im Gegensatz zur Rotation  $\text{rot } \mathbf{A}$ , die *axialer* Vektor genannt wird.

Es ist nun an der Zeit, eine *integrale* Definition der Rotation und der Divergenz neben die differentielle zu stellen.  $\mathbf{A}$  sei ein Fluss, mit Größe und Richtung und der Punkt  $\mathbf{x}_0$  sei umgeben von einer geschlossenen Fläche  $F$  mit Flächeninhalt  $\Delta F$  und Rauminhalt  $\Delta \tau$ . Es gilt:

1. Divergenz:

$$\text{div } \mathbf{A} := \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \int_F \mathbf{A} \cdot d\mathbf{F}, \text{ mit } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{F} = \underbrace{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A})}_{=A_n} dF$$

Diese Definition ist *unabhängig* vom benutzten Koordinatensystem, die explizite Darstellung natürlich schon.

**Beweis:**

Wir werden zwei Beweise verfolgen. Erstens, man nehme ein infinitesimales Parallelepiped und bestimme die Komponenten  $A_i$  entlang der Flächen,

$$\int [A_1(x + \Delta x) - A_1(x)] dx dy = \int_{\text{Taylor}} \underbrace{\Delta x dx dy (\partial_x A_1)}_{\Delta F} = \Delta F \partial_1 A_1$$

entsprechend für die  $y$ - und  $z$ -Flächen, so dass insgesamt

$$\text{div } \mathbf{A} = \partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3$$

Das hätte man auch in  $n$  Dimensionen so zeigen können.

Zweitens, dank Gauß:

$$\frac{1}{(\Delta F)} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{F} = \frac{1}{\Delta F} \int \text{div } \mathbf{A} dF \stackrel{\text{Mittelwertsatz}}{\underset{\Delta F \downarrow 0}{\rightarrow}} \text{div } \mathbf{A}(P)$$

□

2. Rotation:

Die Komponente des Vektors  $\text{rot } \mathbf{A}$  entlang der Achse  $\mathbf{a}$  ist folgendermaßen definiert, wobei wir diesmal eine nicht geschlossene Fläche  $F$  mit dem Rand  $C$  betrachten,  $\Delta F$  ist wieder der Flächeninhalt.

$$\text{rot}_a \mathbf{A} := \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

Lord Kelvins „Zirkulation“



Auch hier ist die Definition wieder unabhängig vom Koordinatensystem, im Gegensatz zur expliziten Darstellung.

Wir skizzieren zwei analoge Beweise zur Divergenz. Dazu nehmen wir an, dass  $F$  ein infinitesimales Quadrat ist und senkrecht auf der  $x$ -Achse steht. Außerdem soll sich der Punkt  $P$  auf der Fläche befinden.

Für den ersten Beweis setzen wir  $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$ , wir berechnen also die  $x$ -Komponente:

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} &= \int [-A_2(z + \Delta z) + A_2(z)] dy + \\ &+ \int [A_3(y + \Delta y) - A_3(y)] dz = \underbrace{\Delta y \Delta z}_{\substack{\Delta F \\ \uparrow \\ \text{Taylor}}} (-\partial_3 A_2 + \partial_2 A_3) \end{aligned}$$

und das führt auf die wohlbekannte  $x$ -Komponente der Rotation in ihrer differentiellen Form.

Andererseits gilt laut Stokes:

$$\frac{1}{\Delta F} \oint \mathbf{A} d\mathbf{s} = \frac{1}{\Delta F} \int \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{F} \xrightarrow[\Delta F \downarrow 0]{\text{Mittelwertsatz}} \mathbf{a} \text{rot } \mathbf{A}(P)$$

Also, es passt alles.

**Bemerkung:** Man kann die Alternativdarstellung von  $\text{div}$  und  $\text{rot}$  auch schön verwenden, um sie in anderen *orthogonalen* Koordinaten auszudrücken. Seien  $p_\mu$ ,  $1 \leq \mu \leq 3$ , die Parameter der drei Flächenscharen. Es gilt

$$ds^2 = \sum_{\mu} g_{\mu}^2 dp_{\mu}^2 \rightarrow ds_{\mu} = g_{\mu} dp_{\mu}, \quad 1 \leq \mu \leq 3$$

also  $(ds_1, ds_2, ds_3)$  anstelle von  $(dx, dy, dz)$ . Damit ergibt sich:

$$\text{grad } U = (\partial_x U, \partial_y U, \partial_z U) = \left( \frac{1}{g_1} \partial_1 U, \frac{1}{g_2} \partial_2 U, \frac{1}{g_3} \partial_3 U \right) \quad \text{in orthogonalen Koordinaten}$$

Für ein Parallelepiped mit Kanten  $\Delta s_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , ergibt sich

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} [\partial_{p_1} (g_2 g_3 A_1) + \partial_{p_2} (g_3 g_1 A_2) + \partial_{p_3} (g_1 g_2 A_3)]$$

und wenn man zu  $p_i$  senkrechte Flächen wählt,

$$\text{rot}_1 \mathbf{A} = \frac{1}{g_1 g_2} [\partial_{p_2} (g_3 A_3) - \partial_{p_3} (g_2 A_2)], \quad \text{usw.}$$

**Bemerkung:** Sei  $\mathbf{A} = \text{grad } U$  ein vorgegebenes stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt  $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ .

Zum Beweis kann man entweder alles explizit ausrechnen:

$$\mathbf{A} = \text{grad } U \Rightarrow \text{rot}_1 \mathbf{A} = \partial_2 \partial_3 U - \partial_3 \partial_2 U = 0, \text{ da die partiellen Ableitungen vertauschen}$$

oder mit Stokes:

$$\oint \mathbf{A} \, d\mathbf{s} = \int \text{rot } \mathbf{A} \, d\mathbf{F}$$

$$d\mathbf{s} \cdot \mathbf{A} = \partial_x U dx + \partial_y U dy + \partial_z U dz = A_i dx_i = dU \Rightarrow d\mathbf{s} \cdot \mathbf{A} \text{ ist ein vollständiges Differential}$$

↑  
vollständiges Diff.

Ein geschlossenes Wegintegral über ein vollständiges Differential ist immer null.

$$0 = \oint dU = \oint \mathbf{A} \, d\mathbf{s} = \int \text{rot } \mathbf{A} \, d\mathbf{F}$$

Da  $F$  eine beliebige Fläche ist, muss  $\text{rot } \mathbf{A} = 0$  gelten.

Umgekehrt, falls  $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ , hängt  $U(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma: \mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}} \mathbf{A} \, d\mathbf{s}$  *nicht* vom Weg  $\Gamma$  ab, denn mit Stokes:

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \, d\mathbf{s} + \int_{-\Gamma_2} \mathbf{A} \, d\mathbf{s} = \oint \mathbf{A} \, d\mathbf{s} = \int \text{rot } \mathbf{A} \, d\mathbf{F} = 0,$$

so dass  $\int_{\Gamma_1} \mathbf{A} \, d\mathbf{s} = \int_{\Gamma_2} \mathbf{A} \, d\mathbf{s}$  nur eine Funktion von  $\mathbf{x}$  ist.

Nach der Obergrenze differenzieren liefert  $\mathbf{A} = \nabla U$ . Damit ist  $\text{rot } \mathbf{A} = 0$  die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Potentials.  $\square$

## 1.2.2 Tensoren

Wir betrachten eine orthogonale Koordinatentransformation:

$$x'_\mu = \sum \alpha_{\mu\nu} x_\nu$$

↑  
orthogonale Matrix

An dieser Stelle sei noch einmal an die Bedingung für die Orthogonalität einer Matrix erinnert:

$$A^T A = 1 \Leftrightarrow A A^T = 1$$

$n < \infty$

Die vorletzte Gleichung ist eine *Darstellung* des Vektors  $\mathbf{x} = (x_\mu)$  bezüglich des alten, ungestrichenen und des neuen, gestrichenen Achsenkreuzes. Das heißt:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}' = A^T \mathbf{x}' \Rightarrow x_\mu = \sum_{\nu} \alpha_{\mu\nu}^T x'_\nu = \sum_{\nu} \alpha_{\nu\mu} x'_\nu$$

↑  
orthogonal

Für die durch die Matrix  $\varepsilon$  definierte quadratische Form  $F(\mathbf{x})$  soll gelten:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{\mu\nu} x_\mu \varepsilon_{\mu\nu} x_\nu \stackrel{!}{=} \sum_{\mu\nu} x'_\mu \underbrace{\varepsilon'_{\mu\nu}}_{\text{definiert } \varepsilon'} x'_\nu$$

Wir betrachten das Skalarprodukt

$$(\mathbf{x}, \varepsilon \mathbf{x}) = (A^T \mathbf{x}', \varepsilon A^T \mathbf{x}') = (\mathbf{x}', \underbrace{A \varepsilon A^T}_{\varepsilon'} \mathbf{x}')$$

so dass

$$\varepsilon' = A \varepsilon A^T \Leftrightarrow \varepsilon'_{k\lambda} = \sum_{\mu\nu} \alpha_{k\mu} \alpha_{\lambda\nu} \varepsilon_{\mu\nu}$$

#### Definition 4 (Tensor)

Ein *Tensor*  $\varepsilon = (\varepsilon_{\mu\nu})$  2. (n-ter) Stufe ist so beschaffen, dass sich die Komponenten wie die Produkte der Komponenten zweier (von n) Vektoren transformieren (unter einer *orthogonalen* Transformation).

Wir kommen nun zu den *Invarianten* eines Tensors 2. Stufe, d.h. einer Matrix. Bekanntlich gilt:

$$\begin{aligned} \text{Tr } AB &= \sum_{\mu} (AB)_{\mu\mu} = \sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu} B_{\nu\mu} = \sum_{\mu\nu} B_{\nu\mu} A_{\mu\nu} = \sum_{\nu} (BA)_{\nu\nu} = \text{Tr } BA \\ \det(AB) &= \det(A) \det(B) = \det(B) \det(A) = \det(BA) \end{aligned}$$

Deshalb gilt:

$$\det(\varepsilon') = \det(A \varepsilon A^T) = \det(A) \det(\varepsilon) \underbrace{\det(A^T)}_{\det(A)} = \underbrace{(\det A)^2}_{=\pm 1 \text{ orthogonal}} \det(\varepsilon) = \det(\varepsilon)$$

Nun betrachten wir für  $3 \times 3$ -Matrizen  $\varepsilon$ :

$$D_{\lambda} = \det(\varepsilon + \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} + \lambda & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} + \lambda & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} + \lambda \end{pmatrix} \stackrel{\uparrow \text{Definition von } \Delta}{=} \det \varepsilon + \lambda \Delta + \lambda^2 \text{Tr } \varepsilon + \lambda^3$$

mit

$$\Delta = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{12}\varepsilon_{21} - \varepsilon_{23}\varepsilon_{32} - \varepsilon_{31}\varepsilon_{13}$$

Wir stellen fest:

$$D'_{\lambda} = \det(A(\varepsilon + \lambda \mathbb{1})A^T) = \det(\varepsilon + \lambda \mathbb{1}) = D_{\lambda}, \quad \forall \lambda$$

und da die Determinante sowie die Spur, wie oben gezeigt, bezüglich einer orthogonalen Transformation invariant sind, muss gelten:

$$\Delta' = \Delta$$

Wir haben in  $\Delta$  also eine neue Invariante gefunden, die aus einer Linearkombination von Unterdeterminanten von  $\varepsilon$  besteht.

Stellen wir uns vor, wir suchen einen Ausdruck, der *quadratisch* in den  $\varepsilon_{\mu\nu}$  und *invariant*

unter orthogonalen Transformationen ist. Die Determinante kann es nicht sein. Also sind die geeigneten Kandidaten:

$$\text{Tr}(\varepsilon^2), \quad (\text{Tr } \varepsilon)^2 \quad \text{und} \quad \Delta$$

Wenden wir uns nun  $\text{Tr}(\varepsilon^2)$  zu. Die Spur  $\text{Tr } \varepsilon^2$  ist eine Invariante, da

$$\text{Tr } \varepsilon'^2 = \text{Tr}(O\varepsilon O^T O\varepsilon O^T) = \text{Tr}(O\varepsilon^2 O^T) = \text{Tr}(\varepsilon^2 O^T O) = \text{Tr}(\varepsilon^2)$$

Wir nehmen ferner an, dass  $\varepsilon$  symmetrisch ist, was bei uns (fast) immer der Fall sein wird:

$$\text{Tr}(\varepsilon^2) = \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji} \underset{\varepsilon \text{ symm.}}{\uparrow} = \sum_{i,j} \varepsilon_{ij}^2 =$$

$$(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 + 2(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2 - \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{22}\varepsilon_{33}) = (\text{Tr } \varepsilon)^2 - 2\Delta$$

das heißt:

$$\Delta = \frac{1}{2} [(\text{Tr } \varepsilon)^2 - \text{Tr}(\varepsilon^2)]$$

Das gilt wie gesagt nur, wenn  $\varepsilon$  *symmetrisch* ist. Dann ist allerdings, wie gerade gezeigt,  $\Delta$  *keine neue* Invariante.

# Kapitel 2

## Bewegungsgleichungen

Wir wenden uns erst den *Euler*-Gleichungen, später den *Navier-Stokes*-Gleichungen zu.

### 2.1 Die Eulergleichungen

#### Definition 5 (Ideale Flüssigkeit)

Eine Flüssigkeit heißt *ideal*, falls es eine Funktion  $p(\mathbf{x}, t)$  gibt, den *Druck*, so dass für ein Flächenelement  $d\sigma$  mit dem (normierten) Normalenvektor  $\mathbf{n}$  die Kraft, die darauf wirkt, von  $p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}d\sigma$  gegeben wird. Die Einheit des Drucks ist  $\text{N/m}^2$ .??evtl.skizze

Wir betrachten nun eine ideale Flüssigkeit in einem Bereich  $\mathbb{B}$  und werden Teilbereiche immer mit  $W$  angeben:  $W \subseteq \mathbb{B}$  (siehe Abb 2.1). Sei  $\mathbf{x} \in \mathbb{B}$  ein *fester* Punkt und sei  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  die Flüssigkeitgeschwindigkeit an der Stelle  $\mathbf{x}$  zur Zeit  $t$ . Bei festem  $t$  ist  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  ein *Vektorfeld*.

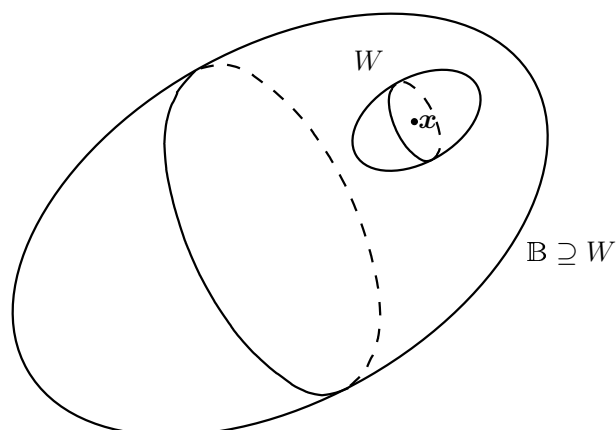


Abbildung 2.1: Die Flüssigkeit befinde sich im Bereich  $\mathbb{B}$ , Teilbereiche werden mit  $W$  bezeichnet.  $\mathbf{x} \in \mathbb{B}$  sei ein fester Punkt.

Außerdem sei  $\rho(\mathbf{x}, t)$  die Massendichte, so dass

$$m(W, t) = \int_W \rho(\mathbf{x}, t) d^3x$$

die Masse im Bereich  $W$  zur Zeit  $t$  ist. Vorläufig seien  $\mathbf{v}$  und  $\rho$  „glatt genug“. Bei Schockwellen ist dem z.B. nicht mehr so.

Wir werden die *Euler-Gleichungen* als Konsequenz von drei *Erhaltungssätzen* herleiten. Für Kontinua könnte man bei II. und III. auch „Hypothesen“ sagen:

- I. Masse wird weder erzeugt, noch vernichtet. Die Konsequenz davon ist die *Kontinuitätsgleichung*, die gleich eingehender betrachtet wird.
- II. Die Änderung des Impulses wird von einer Kraft erzeugt (Newton). Daraus werden wir die Euler-Gleichung ableiten.
- III. Die Energie ist eine erhaltene Größe.

## 2.2 Massenerhaltung

Wir betrachten die zeitliche Änderung der Masse in einem festen und beliebigen Bereich  $W$  (siehe Abb. 2.2):

$$\frac{d}{dt} m(W, t) = \frac{d}{dt} \int_W \rho(\mathbf{x}, t) d^3x = \int_W \partial_t \rho(\mathbf{x}, t) d^3x .$$

Die Masse kommt nur über den Rand  $\partial W$  in  $W$  hinein oder heraus (siehe Abb. 2.2), so dass

$$\int_W \partial_t \rho(\mathbf{x}, t) d^3x = - \int_{\partial W} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = - \int_W \overset{\uparrow \text{Gauß}}{\text{div}(\rho \mathbf{v})} d^3x$$

mit dem Oberflächenelement  $d\sigma$  gilt. Wir erhalten

$$\int_W [\partial_t \rho + \text{div}(\rho \mathbf{v})] d^3x = 0$$

Das Minus nach dem ersten Gleichheitszeichen kommt daher, dass Normalenvektor  $\mathbf{n}$  nach außen zeigt und wir es deshalb mit einem Massenverlust zu tun haben.

Da  $W$  ein beliebiges Volumen ist, muss gelten:

$$\boxed{\partial_t \rho + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0} . \tag{2.1}$$

Dies ist die Kontinuitätsgleichung, welche bei Massenerhaltung immer gilt.

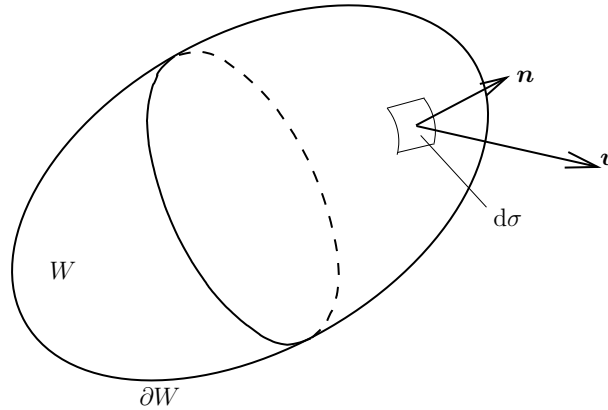


Abbildung 2.2: Zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung: Die Flüssigkeit kann den Bereich  $W$  nur durch die Oberfläche verlassen.

## 2.3 Impulsänderung und das Zweite Newton'sche Gesetz

Sei  $\mathbf{x}(0) \rightarrow \mathbf{x}(t) =: \varphi_t(\mathbf{x})$  die Zeitentwicklung infolge der Dynamik. Dann ist

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t)) = \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t)$$

das zugehörige Geschwindigkeitsfeld. Beachte, dass  $\mathbf{x}(t)$  die *Bahn* eines Flüssigkeitsteilchens ist, dessen Beschleunigung wir berechnen wollen. Also ist  $\mathbf{x}$  nicht mehr fest, *wir laufen nun mit einem Flüssigkeitsteilchen mit*. Nun zur Beschleunigung  $\mathbf{a}(t)$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{\mu} (\partial_{\mu} \mathbf{v}) \dot{x}_{\mu} + \partial_t \mathbf{v} = \left( \sum_{\mu} v_{\mu} \partial_{\mu} + \partial_t \right) \mathbf{v} =: D_t \mathbf{v}$$

Damit haben wir die totale bzw. materielle Ableitung

$$D_t := \mathbf{v} \cdot \nabla + \partial_t$$

eingeführt.

**Bemerkung:** [Sommerfeld II, § 11.6] Man kann  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  in eine Form bringen, die auch für krummlinige Koordinaten Gültigkeit besitzt:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}$$

**Beweis:**

$$\underbrace{\left( \sum_{\mu} v_{\mu} \partial_{\mu} \right)}_{(\mathbf{v} \cdot \nabla)} v_1 = \frac{1}{2} \partial_1 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - v_2 \partial_1 v_2 - v_3 \partial_1 v_3 + v_2 \partial_2 v_1 + v_3 \partial_3 v_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \partial_1 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + v_2 \underbrace{(\partial_2 v_1 - \partial_1 v_2)}_{-(\text{rot } \mathbf{v})_3} + v_3 \underbrace{(\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3)}_{(\text{rot } \mathbf{v})_2}$$

und entsprechend für die übrigen Komponenten.  $\square$

Wir übertragen  $\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}$  auf ein Volumenelement:  $\rho(\mathbf{x}, t) d^3x D_t \mathbf{v}$  entspricht der Impulsänderung. Nun zu den Kräften; für ein Kontinuum sind die Kräfte zweierlei:

1. Spannungen *an der Oberfläche*, da interne Kräfte *sehr kurzreichweitig* sind
2. externe Kräfte, die auf das ganze Volumen wirken, wie z.B. Schwerkraft oder Magnetfeld

In einer *idealen* Flüssigkeit gibt es an einer Oberfläche definitionsgemäß keine Tangentialkräfte, nur die Normalkraft  $-p(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} d\sigma$ .

Betrachten wir einen Teilbereich  $W$ , so ist die Kraft auf  $W$ :

1.

$$\mathbf{F}_{\partial W} = - \int_{\partial W} p(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} d\sigma(\mathbf{x})$$

$\uparrow$   
nach außen

Da der Druck  $p > 0$  ist und nach innen wirkt, müssen wir den negativen Normalenvektor  $-\mathbf{n}$  schreiben. Sei  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$  ein beliebiger fester Vektor, dann folgt, da

$$\text{div}(p\mathbf{e}) = \sum_{\mu} \partial_{\mu}(p e_{\mu}) = \sum_{\mu} e_{\mu} \partial_{\mu} p = \mathbf{e} \cdot \nabla p$$

gilt, für  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}_{\partial W}$

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}_{\partial W} = - \int_{\partial W} p \mathbf{e} \mathbf{n} d\sigma = - \int_{\partial W} p \mathbf{e} \mathbf{n} d\sigma \stackrel{\uparrow \text{Gau\ss}}{=} - \int_W \text{div}(p\mathbf{e}) d^3x = -\mathbf{e} \cdot \int_W \nabla p d^3x$$

Weil  $\mathbf{e}$  ein beliebiger Vektor ist, gilt

$$\mathbf{F}_{\partial W} = - \int_W \nabla p d^3x$$

2. Sei die Schwerkraftsbeschleunigung  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ , so ist die externe Kraft

$$\mathbf{G} = \int_W \mathbf{g} \underbrace{\rho d^3x}_{dm}$$

Zusammen ist die Kraft *pro Volumeneinheit*  $\mathbf{F}/V = -\nabla p + \rho \mathbf{g}$  und deshalb gilt mit  $\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} = D_t \mathbf{v} \rho(\mathbf{x}, t) d^3x$ :

$$\boxed{\rho D_t \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}} \quad (2.2)$$

Dies ist die Euler-Gleichung.



Wir sind schon zwischen Integral- und Differentialform hin- und hergependelt und wollen nun die grundlegende Integralform über zwei Wege herleiten.

1. Aus

$$\rho D_t \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}$$

ergibt sich

$$\rho \partial_t \mathbf{v} = -\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{g} = \partial_t(\rho \mathbf{v}) - \mathbf{v} \partial_t \rho$$

Daraus folgt mit der Kontinuitätsgleichung  $\partial_t \rho = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{v})$ :

$$\partial_t(\rho \mathbf{v}) = -\mathbf{v} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{g}$$

Sei nun  $\mathbf{e}$  wieder ein fester Vektor, so dass

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \partial_t(\rho \mathbf{v}) &= -\mathbf{e} \mathbf{v} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{e} \mathbf{v} - \nabla p \mathbf{e} + \rho \mathbf{g} \mathbf{e} \\ &= -\operatorname{div}[p \mathbf{e} + \rho \mathbf{v}(\mathbf{e} \mathbf{v})] + \rho \mathbf{g} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Hier haben wir die Produktregel für die Divergenz  $\operatorname{div}(f \mathbf{a}) = f \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla f$  benutzt ( $f \hat{=} \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{a} \hat{=} \rho \mathbf{v}$ ). Sei  $W$  ein festes Volumen im Definitionsbereich  $\mathbb{B}$ , so folgt für alle  $\mathbf{e}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \frac{d}{dt} \int_W \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d^3x &= \int_W \mathbf{e} \partial_t(\rho \mathbf{v}) d^3x \stackrel{(2.3)}{\underset{\text{Gauß}}{=}} - \int_{\partial W} [p \mathbf{e} + \rho \mathbf{v}(\mathbf{e} \mathbf{v})] \mathbf{n} d\sigma + \\ &+ \int_W \rho \mathbf{g} \mathbf{e} d^3x = \mathbf{e} \left( - \int_{\partial W} [p \mathbf{n} + \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \mathbf{n})] d\sigma + \int_W \rho \mathbf{g} d^3x \right) \end{aligned}$$

Und deshalb ergibt sich für die Impulsänderung in  $W$ :

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho \mathbf{v} d^3x = - \int_{\partial W} \underbrace{[p \mathbf{n} + \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \mathbf{n})]}_{\substack{\text{Druck} \\ \text{Imp.-Strom/Oberfl.Einh.}}} d^3x + \underbrace{\int_W \rho \mathbf{g} d^3x}_{\text{Schwerkraft}} \quad (2.4)$$

insbesondere ist  $-\rho \mathbf{v} \mathbf{n} d\sigma$  der Massenstrom durch  $d\sigma$  und  $(-\rho \mathbf{v} \mathbf{n} d\sigma) \mathbf{v}$  der zugehörige Impulsstrom.

2. Wir betrachten einen Bereich  $W$  zur Zeit  $t=0$  und dessen zeitliche Entwicklung, also  $W \xrightarrow{\text{Dynamik}} W_t$  zur Zeit  $t$ . Das Newton'sche Gesetz lautet deshalb für die Masse, die anfänglich in  $W$  ist:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho \mathbf{v} d^3x}_{\text{Änderung des Impulses}} = \underbrace{\mathbf{F}_{\partial W_t} + \int_{W_t} \rho \mathbf{g} d^3x}_{\text{totale Kraft}} \quad (2.5)$$

**Lemma 6**

Die Gleichungen (2.2) und (2.5) sind äquivalent.

**Beweis:**

Starte links, beachte  $\mathbf{x} \xrightarrow{\varphi_t} \mathbf{x}(t) \in W_t$ , so dass

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \underbrace{\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}_{(\rho \mathbf{v})(\mathbf{x}, t)} d^3x = \frac{d}{dt} \int_W (\rho \mathbf{v})(\mathbf{x}(t), t) \underbrace{J(\mathbf{x}, t)}_{\text{Jacobi-Det. von } \varphi_t} d^3x$$

Für diese Umformung haben wir folgenden Satz benutzt:

**Satz 7**

Sei  $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{x} \in \mathbb{B}$ , sowie  $f$  ein Diffeomorphismus mit  $\mathbf{x} = f(\mathbf{y})$ , dann gilt

$$\int_{\mathbb{B}} \psi(\mathbf{x}) d^n x = \int_{f^{-1}(\mathbb{B})} \psi(f(\mathbf{y})) \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \right| d^n y$$

mit der Jacobi-Determinante

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} := \det(\partial_{y_j} x_i)$$

In unserem Fall entspricht  $\varphi_t$  also  $f$ . Da  $W$  fest ist, können wir unter dem Integralzeichen differenzieren und erhalten so:

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} (\rho \mathbf{v})(\mathbf{x}, t) d^3x = \int_W \partial_t [(\rho \mathbf{v})(\mathbf{x}(t), t) J(\mathbf{x}, t)] d^3x \quad (2.6)$$

Wir betrachten nun zwei Fakten. Erstens,

$$\partial_t (\rho \mathbf{v})(\mathbf{x}(t), t) = \sum_i \underbrace{[\partial_{x_i} (\rho v_i)]}_{\text{wird weggelassen}} \dot{\mathbf{x}}(t) + \partial_t (\rho \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla (\rho \mathbf{v}) + \partial_t (\rho \mathbf{v}) = D_t (\rho \mathbf{v})$$

Zweitens, es gibt ein nettes Lemma, das uns etwas über  $\partial_t J(\mathbf{x}, t)$  sagt:

**Lemma 8**

$$\partial_t J(\mathbf{x}, t) = J(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t) \quad (2.7)$$

**Beweis:**

Wir müssen uns zuerst überlegen, wie wir eine Determinante nach ihren Matrixelementen differenzieren. Wir erinnern uns dazu an die *adjunkte* Matrix:

Aus einer  $(n \times n)$ -Matrix  $G$  kann man  $(n \times n)$  Untermatrizen der Dimension  $(n-1) \times (n-1)$  konstruieren, indem man die  $\nu$ -te Zeile sowie die  $k$ -te Spalte weglässt. Diese Matrizen nennen wir  $\tilde{G}_{\nu k}$ . Die Adjunkte von  $G$ ,  $\text{adj}(G)$  ist nun so definiert:

$$\text{adj}(G)_{\nu k} = (-)^{\nu+k} \det(\tilde{G}_{\nu k})$$

Man kann zeigen, dass

$$G \text{adj}(G) = \det(G) \mathbb{1}$$

gilt, oder anders geschrieben:

$$\sum_k g_{\mu k} \text{adj}(G)_{k\nu} = \det(G) \delta_{\mu\nu}$$

Damit finden wir:

1.

$$\sum_k g_{\mu k} \text{adj}(G)_{k\nu} = \det(G) \delta_{\mu\nu} \Rightarrow \frac{\partial \det(G)}{\partial g_{\mu k}} = \text{adj}(G)_{k\mu}$$

2. Nun gilt für die Jacobi-Matrix:

$$g_{\mu k} = \partial_k x_\mu(t) \Rightarrow \partial_t g_{\mu k} = \partial_k v_\mu(t) \stackrel{!}{=} \partial_k v_\mu(\mathbf{x}(t), t) = \sum_\lambda \frac{\partial v_\mu(\mathbf{x}(t), t)}{\partial x_\lambda(t)} \underbrace{\partial_k x_\lambda(t)}_{g_{\lambda k}}$$

3. Damit ergibt sich mit 1. und 2., wobei wir für  $\det(G)$  aus 1.  $J$  einsetzen:

$$\begin{aligned} \partial_t J &= \sum_{\mu k} \frac{\partial J}{\partial g_{\mu k}} \partial_t g_{\mu k} = \sum_{\mu k \lambda} \underbrace{\text{adj}(G)_{k\mu} g_{\lambda k}}_{J \delta_{\mu\lambda}} \frac{\partial v_\mu(\mathbf{x}(t), t)}{\partial x_\lambda(t)} = \\ &= J \sum_{k\lambda} \delta_{\mu\lambda} \frac{\partial v_\mu(\mathbf{x}(t), t)}{\partial x_\lambda(t)} = J \underbrace{\sum_\lambda \frac{\partial v_\lambda(\mathbf{x}(t), t)}{\partial x_\lambda(t)}}_{\text{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)} = J \text{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t) \end{aligned}$$

□

**Konsequenz 1**  $\partial_t J = J \text{div} \mathbf{v}$  und damit:

$$J(\mathbf{x}, t) = \underbrace{J(\mathbf{x}, 0)}_{=1} \exp \left[ \int_0^t \text{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}(t'), t') dt' \right]$$

Die obige, scheinbar explizite Formel nützt in der Praxis herzlichst wenig, es sei denn,  $\text{div} \mathbf{v} = 0$ .

Wir verfolgen nun unser Argument bei (2.6):

$$\int_W \partial_t [(\rho \mathbf{v})(\mathbf{x}(t), t) J(\mathbf{x}, t)] d^3 x = \int_W [ \underbrace{J \partial_t(\rho \mathbf{v})}_{=D_t(\rho \mathbf{v})} + \rho \mathbf{v} \underbrace{\partial_t J}_{=J \text{div} \mathbf{v}} ] d^3 x =$$

$$= \int_W J[D_t(\rho\mathbf{v}) + \operatorname{div}\mathbf{v}(\rho\mathbf{v})]d^3x = \int_{W_t} [D_t(\rho\mathbf{v}) + \mathbf{v}(\rho \operatorname{div}\mathbf{v})](\mathbf{x}, t)d^3x$$

Die eckige Klammer können wir dank der Kontinuitätsgleichung vereinfachen:

$$D_t(\rho\mathbf{v}) + \mathbf{v}(\rho \operatorname{div}\mathbf{v}) = \rho D_t\mathbf{v} + \mathbf{v}D_t\rho + \mathbf{v}(\rho \operatorname{div}\mathbf{v}) = \rho D_t\mathbf{v} + \mathbf{v} \left[ \partial_t\rho + \underbrace{(\mathbf{v} \cdot \nabla)\rho + \rho \operatorname{div}\mathbf{v}}_{\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = -\partial_t\rho} \right] = \rho D_t\mathbf{v}$$

und somit gilt:

$$\begin{aligned} \int_{W_t} \underbrace{\rho D_t\mathbf{v}}_{(2.2) \text{ links}} d^3x &= \int_W \partial_t[(\rho\mathbf{v})J(\mathbf{x}, t)]d^3x = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho\mathbf{v}d^3x}_{(2.5) \text{ links}} = \\ \underbrace{\mathbf{F}_{\partial W_t} + \int_{W_t} \rho\mathbf{g}d^3x}_{(2.5) \text{ rechts}} &= - \int_{W_t} \nabla p d^3x + \int_{W_t} \rho\mathbf{g}d^3x = \int_{W_t} \underbrace{(-\nabla p + \rho\mathbf{g})}_{(2.2) \text{ rechts}} d^3x \end{aligned}$$

Da dies für alle  $W$  und  $W_t$  richtig sein soll, sind (2.2) und (2.5) äquivalent und wir haben das Lemma bewiesen.  $\square$

Das obige Argument zur Herleitung von

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho\mathbf{v}d^3x = \int_{W_t} \rho D_t\mathbf{v}d^3x$$

führt völlig analog zum geliebten

### Satz 9 (Transporttheorem)

Sei  $f$  eine differenzierbare Funktion von  $\mathbf{x}$  und  $t$ , so gilt:

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho f d^3x = \int_{W_t} \rho D_t f d^3x \quad (2.8)$$

sowie

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} f d^3x = \int_{W_t} [\partial_t f + \operatorname{div}(f\mathbf{v})]d^3x \quad (2.9)$$

Beachte, dass (2.9) unabhängig von der Dichte  $\rho$  ist. Außerdem gibt es infolge des Lemmas **Konsequenz 2** Falls ein Fluss *inkompressibel* ist, also falls

$$\operatorname{Vol}(W_t) = \int_{W_t} d^3x = \operatorname{Vol}(W_0)$$

Für alle Zeiten  $t$ , oder äquivalent für alle  $W$ , gilt:

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{W_t} d^3x = \frac{d}{dt} \int_W J d^3x \stackrel{(2.7)}{=} \int_W J \operatorname{div} \mathbf{v} d^3x = \int_{W_t} \operatorname{div} \mathbf{v} d^3x$$

so sind folgende drei Bedingungen äquivalent:

1. der Fluss ist inkompressibel
2.  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$
3.  $J = 1$

**Beweis:**

1.  $\Rightarrow$  2. haben wir schon gesehen. 3. folgt nun sofort aus Konsequenz 1 und wenn  $J = 1$ , so gilt  $\int_{W_t} d^3x = \int_W J d^3x = \int_W d^3x$ , für alle Zeiten  $t$ .  $\square$

**Bemerkung:** Da  $\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$  äquivalent zu  $D_t \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  und  $\rho > 0$  ist (wo es Flüssigkeit geben darf), ist eine Flüssigkeit inkompressibel dann und nur dann, wenn  $D_t \rho = 0$ , das heißt, wenn man der Flüssigkeit folgt. Für eine *homogene* Flüssigkeit mit  $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(t)$  besagt die Kontinuitätsgleichung  $\partial_t \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , so dass Inkompressibilität (wegen  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ ) äquivalent mit  $\partial_t \rho = 0$  ist, das heißt  $\rho(t) = \rho(0)$  ist auch konstant *in der Zeit*. In der Ozeanographie gibt es Probleme mit *inhomogenen* inkompressiblen Flüssigkeiten. Außerdem gilt:

Inkompressibilität  $\Rightarrow \mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$  für ein bestimmtes Vektorpotential  $\mathbf{A}$ .

**Konsequenz 3:** Mittels Lemma und Transport-Theorem kann man auch die Kontinuitätsgleichung „lösen“. Setze dazu  $f = 1$  im Transport-Theorem:

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho(\mathbf{x}, t) d^3x = 0$$

was nichts anderes als Massenerhaltung im sich *mitbewegenden* Teilbereich  $W_t$  ist. Also gilt für alle  $W_0$ :

$$\int_{W_0} \rho(\mathbf{x}, 0) d^3x = \int_{W_t} \rho(\mathbf{x}, t) d^3x = \int_{W_0} \rho(\mathbf{x}(t), t) J(\mathbf{x}, t) d^3x$$

Und weil  $W_0$  beliebig ist:

$$\rho(\mathbf{x}(t), t) J(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, 0) \tag{2.10}$$

Mit Konsequenz 1 ergibt sich:

$$\rho(\mathbf{x}(t), t) = \rho(\mathbf{x}(0)) \exp \left[ - \int_0^t \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}(t'), t') dt' \right]$$

Gleichung (2.10) sagt nochmals, dass das, was zur Zeit  $t=0$  homogen ist, nicht notwendigerweise homogen bleiben muss. Es ist dann und nur dann für alle Zeiten homogen, wenn  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  ist, das heißt, wenn die Flüssigkeit inkompressibel ist.

**Satz 10 (Formel von Reynolds)**

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} f(\mathbf{x}, t) d^3x = \int_{W_t} \partial_t f(\mathbf{x}, t) d^3x + \int_{\partial W_t} \mathbf{v} f(\mathbf{x}, t) d\sigma$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} & \int_{W_{t+\Delta t}} f(\mathbf{x}, t + \Delta t) d^3x - \int_{W_t} f(\mathbf{x}, t) d^3x = \int_{W_{t+\Delta t}} \underbrace{[f(\mathbf{x}, t + \Delta t) - f(\mathbf{x}, t)]}_{\partial_t f(\mathbf{x}, t) \Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2)} d^3x + \\ & + \int_{W_{t+\Delta t}} f(\mathbf{x}, t) d^3x - \int_{W_t} f(\mathbf{x}, t) d^3x = \int_{W_{t+\Delta t}} \underbrace{[f(\mathbf{x}, t + \Delta t) - f(\mathbf{x}, t)]}_{\partial_t f(\mathbf{x}, t) \Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2)} d^3x + \int_{\partial W_t} \mathbf{v} \delta t f(\mathbf{x}, t) \underbrace{\mathbf{n} d\sigma}_{d\sigma} = \\ & = \left[ \int_{W_{t+\Delta t}} \partial_t f(\mathbf{x}, t) d^3x + \int_{\partial W_t} \mathbf{v} f(\mathbf{x}, t) d\sigma \right] \Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \end{aligned}$$

und damit

$$\int_{W_t} \partial_t f(\mathbf{x}, t) d^3x + \int_{\partial W_t} \mathbf{v} f(\mathbf{x}, t) d\sigma = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \int_{W_{t+\Delta t}} f(\mathbf{x}, t + \Delta t) d^3x - \int_{W_t} f(\mathbf{x}, t) d^3x \right] / \Delta t$$

□

**Satz 11**

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} f d^3x = \int_{W_t} \underbrace{(D_t f + f \operatorname{div} \mathbf{v})}_{\partial_t f + \operatorname{div}(f \mathbf{v})} d^3x$$

**Beweis:**

mit Gauß

$$\begin{aligned} \int_{\partial W_t} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} f d\sigma &= \int_{W_t} \operatorname{div}(f \mathbf{v}) d^3x \stackrel{\text{Reynolds}^\dagger}{=} \frac{d}{dt} \int_{W_t} f d^3x - \int_{W_t} \partial_t f(\mathbf{x}, t) d^3x \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{W_t} f d^3x &= \int_{W_t} (\partial_t f + \operatorname{div}(f \mathbf{v})) d^3x \end{aligned}$$

□

Wir bieten jetzt noch einen zweiten Beweis des Korollars, das auch unter dem Namen „Transport-Theorem“ firmiert

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{W_t} f(\mathbf{x}, t) d^3x &= \frac{d}{dt} \int_W f(\mathbf{x}(t), t) J(\mathbf{x}, t) d^3x \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_W (J D_t f(\mathbf{x}(t), t) + \underbrace{f(\mathbf{x}(t), t) \partial_t J}_{(f(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}) J \text{ mit obigem Lemma (2.7)}}) d^3x \\ &= \int_W [D_t f(\mathbf{x}(t), t) + f(\mathbf{x}(t), t) \operatorname{div} \mathbf{v}] J d^3x = \int_{W_t} [D_t f(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}] d^3x \end{aligned}$$

□

## 2.4 Energieerhaltung

Die Energie pro Volumeneinheit sei  $u := \underbrace{\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2}_{e_{kin}} + \underbrace{\rho e}_{e_{intern}}$ . Wir fassen einen Bereich  $W \subseteq \mathbb{B}$

ins Auge und verfolgen die Änderung der kinetischen Energie  $\int_{W_t} e_{kin}(\mathbf{x}(t), t) d^3x$ . Dank des Transport-Theorems ergibt sich:

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 d^3x \stackrel{(2.8)}{=} \int_{W_t} \rho D_t \mathbf{v}^2 d^3x = \int_{W_t} \rho \mathbf{v} D_t \mathbf{v} d^3x$$

da  $D_t$  wie eine „Derivation“ wirkt. Ausgehend von dieser Integralform betrachten wir zuerst inkompressible Flüssigkeiten.

### 2.4.1 Inkompressible Flüssigkeiten

$e_{intern} = 0$ , so dass nur

$$\frac{d}{dt} E_{kin} = \int_{W_t} \rho \mathbf{v} D_t \mathbf{v} d^3x = - \int_{\partial W_t} \underbrace{p \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}_{\substack{\text{Kräfte} \\ \text{leisten} \\ \text{Arbeit}}} + \int_{W_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d^3x$$

übrig bleibt, d.h.

$$\int_{W_t} \rho \mathbf{v} \underbrace{(\partial_t + \mathbf{v} \nabla)}_{D_t} \mathbf{v} d^3x \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{W_t} [-\operatorname{div}(p \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \mathbf{v}] d^3x \stackrel{\operatorname{div} \mathbf{v} = 0}{=} \int_{W_t} [-\mathbf{v} \cdot \nabla p + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}] d^3x$$

und da  $W_t$  beliebig ist, folgt

$$0 = \mathbf{v}(\rho D_t \mathbf{v} + \nabla p - \rho \mathbf{g}) = -p \operatorname{div} \mathbf{v}$$

Wir sehen also, dass  $e_{intern} = 0$  sehr eng mit Inkompressibilität verknüpft ist, und es gilt:

$$\rho D_t \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}, \quad D_t \rho = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial \mathbb{B}} = 0$$

## 2.4.2 Isentrope Flüssigkeiten

Wir starten mit der Euler-Gleichung

$$D_t \mathbf{v} = \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\rho^{-1} \nabla p + \mathbf{g}$$

Wie schon erwähnt, wurde die Energiedissipation bei der Herleitung nicht berücksichtigt. Dies kann in einer strömenden Flüssigkeit

- (i) infolge einer *inneren Reibung* (Zähigkeit)
- (ii) durch den *Wärmeaustausch* zwischen verschiedenen Flüssigkeitsteile

auftreten. In einer „idealen“ Flüssigkeit treten solche Prozesse eben nicht auf. Beim Fehlen des Wärmeaustauschs läuft die Bewegung *adiabatisch* ab. Deshalb ändert sich die Entropie jedes kleinen Massenelements *nicht* (daher auch der Name isentrop):

$$D_t s = 0$$

wobei  $s$  die Entropie *pro Masseneinheit* ist. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass  $D_t$  bedeutet, dass wir uns mit der Flüssigkeit mitbewegen. Das heißt

$$D_t s = (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) s = 0$$

Dank der Kontinuitätsgleichung  $\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$  lässt sich dies umschreiben zu:

$$\partial_t(\rho s) + \operatorname{div}(\underbrace{\rho s \mathbf{v}}_{\text{Entropiestromdichte}}) = 0$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} D_t s = 0, \quad D_t \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \\ \Rightarrow D_t(\rho s) = \rho D_t s + s D_t \rho = -s \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &\Rightarrow D_t(\rho s) + s \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \Rightarrow \partial_t(\rho s) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\rho s) + s \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= \partial_t(\rho s) + \operatorname{div}(\rho s \mathbf{v}) = 0 \end{aligned}$$

□

Falls  $D_t s = \frac{ds}{dt} = 0 \Leftrightarrow ds = 0$  gilt, spricht man von einer *isentropen* Bewegung. Sei  $w$  die *Enthalpie pro Masseneinheit* und  $v_s = \rho^{-1}$  das spezifische Volumen. Dann gilt

$$dw = T ds + v_s dp \tag{2.11}$$

da

$$\underbrace{W}_{\text{Enthalpie}} := E + pV \Rightarrow dW = dE + (p dV + V dp) = \delta Q - p dV + (p dV + V dp) =$$



$$= \delta Q + V dp \stackrel{!}{=} T dS + V dp \quad \Rightarrow \quad dW = T dS + V dp$$

$\uparrow$   
 $dS \geq \frac{\delta Q}{T}$

Wenn wir die rechte Gleichung durch  $m$  dividieren, erhalten wir (2.11).

Bei einer isentropen Bewegung ist  $ds = 0$ , so dass aus (2.11) folgt:  $dw = v_s dp = \rho^{-1} dp$

$$\Rightarrow \quad \rho^{-1} \nabla p = \nabla w$$

und die Euler-Gleichung für inkompressible Flüssigkeiten ist damit

$$\boxed{D_t \mathbf{v} = -\rho^{-1} \nabla p + \mathbf{g} = -\nabla w + \mathbf{g}}$$

Sehr oft lässt sich  $\mathbf{g}$  als  $\mathbf{g} = -\text{grad } \gamma$  schreiben. Wie wir oben bereits gezeigt haben, gilt

$$\frac{1}{2} \text{grad}(\mathbf{v}^2) = \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (2.12)$$

so dass zusammen mit der Euler-Gleichung

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla w + \mathbf{g} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} - \text{grad} \left( w + \gamma + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right)$$

folgt, was, wenn wir die Rotation dieser Gleichung bilden, auf folgende schöne Relation, die nur noch die Geschwindigkeit enthält, führt:

$$\boxed{\partial_t \text{rot } \mathbf{v} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v})}$$

Mit der Randbedingung  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$  haben wir fünf Unbekannte, nämlich  $\mathbf{v}$ ,  $p$  und  $\rho$ . Wir haben auch fünf Gleichungen, und zwar

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla w + \mathbf{g} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

die Kontinuitätsgleichung  $\partial_t \mathbf{v} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$  und die Zustandsgleichung  $p(\rho) = A \rho^\kappa$ .

Was hier über Flüssigkeiten gesagt wurde, gilt mutatis mutandis auch für Gase. Bei *adiabatischer* Komprimierung gilt, dass es ein  $\kappa$  gibt, mit

$$\kappa \geq 1 \text{ und } p(\rho) = A \rho^\kappa$$

$$\stackrel{(2.11)}{\Rightarrow} w = \int_0^\rho \lambda^{-1} dp(\lambda) = \int_0^\rho \frac{A \kappa \lambda^{\kappa-1}}{\lambda} d\lambda = \frac{A \kappa}{\kappa-1} \rho^{\kappa-1} + C = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho}$$

$\uparrow$   
 $=0 \text{ für } \rho=0 \text{ und } \kappa > 1$

Außerdem,  $e = w - \frac{p}{\rho} = A \left( \frac{\kappa}{\kappa-1} - 1 \right) \rho^{\kappa-1} = \frac{A}{\kappa-1} \rho^{\kappa-1} (\rho-1)^{-1} \frac{p}{\rho}$

Für das ideale Gas gilt mit der Stoffmenge  $\nu$ :

$$0 \stackrel{!}{=} \delta Q = \nu c_v dT + \underbrace{\frac{\nu RT}{V} dv}_{p dv} = dE - \delta W \Rightarrow \frac{c_v}{R} \frac{dT}{T} + \frac{dv}{V} = 0$$

und da  $c_v$  nicht von  $T$  abhängt, folgt (im Folgenden wird die Konstante  $C$  ihren Wert ändern, aber weiterhin mit  $C$  bezeichnet werden):

$$\frac{c_v}{R} \ln T + \ln V = C \Rightarrow T^{c_v/R} \cdot V = C$$

Wenn wir  $T$  aus der idealen Gasgleichung  $\nu RT = pV \Rightarrow T = \frac{pV}{\nu R}$  einsetzen, erhalten wir  $V(pV)^{c_v/R} = C$ , so dass

$$pV^\kappa = C$$

mit  $\kappa = 1 + \frac{R}{c_v} = \frac{c_v + R}{c_v} > 1$ .

## 2.5 Energiestrom(dichte)

Neben der Entropiestromdichte gibt es auch eine Energiestromdichte. Um diese genauer zu betrachten wählen wir ein *festes* Volumenelement und bestimmen, wie sich die Energie im Laufe der Zeit ändert. Die zeitliche Ableitung der Energie pro Volumeneinheit ist

$$\partial_t \left( \underbrace{\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2}_{\text{kin. Energie}} + \underbrace{\rho e}_{\text{„interne“ Energie}} \right)$$

Wir betrachten zunächst die zeitliche Änderung der kinetischen Energie:

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \right) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \partial_t \rho + \rho \mathbf{v} \partial_t \mathbf{v}$$

Wenn wir die Kontinuitäts- und Eulergleichung einsetzen, erhalten wir:

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \right) = -\frac{\mathbf{v}^2}{2} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla p + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \rho \underbrace{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}}_{\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \mathbf{v}^2}$$

mit

$$dw = T ds + \rho^{-1} dp \quad \Rightarrow \quad \nabla p = \rho \nabla w - \rho T \nabla s$$

folgt schließlich:

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \right) = -\frac{\mathbf{v}^2}{2} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + w \right) + \rho T \mathbf{v} \cdot \nabla s + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}$$

Nun wenden wir uns  $\partial_t(\rho e)$  zu,

$$\begin{aligned} de &= T ds - p d v_s = T ds - p d(\rho^{-1}) = T ds + p \rho^{-2} d\rho \\ \Rightarrow d(\rho e) &= e d\rho + \rho de = e d\rho + \rho T ds + \underbrace{\frac{p}{\rho}}_{w=e+p/\rho} d\rho = w d\rho + \rho T ds \end{aligned}$$

und daher

$$\partial_t(\rho e) = w\partial_t\rho + \rho T\partial_t s$$

mit der Kontinuitätsgleichung und  $D_t s = 0 \Rightarrow \partial_t s = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)s$  folgt:

$$\partial_t(\rho e) = -w\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) - \rho T(\mathbf{v} \cdot \nabla)s$$

Wir sammeln die Terme:

$$\partial_t \left( \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + \rho e \right) = - \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} + w \right) \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) - \rho\mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} + w + \underbrace{\gamma}_{\mathbf{g} = -\nabla\gamma} \right)$$

und erhalten:

$$\underbrace{\partial_t \left( \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + \rho e \right)}_{\text{Energiedichte}} = -\operatorname{div} \left[ \underbrace{\rho\mathbf{v} \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} + w \right)}_{\text{Energiestromdichte}} \right] + \underbrace{\rho\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}}_{\text{für } \gamma \neq 0}$$

Um die Bedeutung rechts zu untermauern, integrieren wir die Gleichung über irgendein (festes!) Volumen, während wir  $\mathbf{g} = 0$  setzen.

$$\underbrace{\partial_t \int_V \left( \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + \rho e \right) d^3x}_{\text{Energieänderung pro Zeiteinheit in } V} = - \int_V \operatorname{div} \left[ \rho\mathbf{v} \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} + w \right) \right] d^3x = - \underbrace{\oint_{\partial V} \rho\mathbf{v} \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} + w \right) d\sigma}_{\substack{\uparrow \\ \text{Gauß}}}_{\text{Energienmenge, die pro Zeiteinheit aus } V \text{ heraus fließt}}$$

Die Flüssigkeit führt pro Masseneinheit die Energie  $(w + \mathbf{v}^2/2)$  mit sich. Man beachte, da steht  $w$  und nicht  $e$ , denn mit der spezifischen Enthalpie  $w = e + p/\rho$  kommen wir auf

$$\partial_t \int_V \left( \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + \rho e \right) d^3x = - \underbrace{\oint_{\partial V} \rho\mathbf{v} \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} + e \right) d\sigma}_{\substack{\text{Transport der kin. und} \\ \text{inn. Energie pro Zeit-} \\ \text{einheit durch } \partial V \text{ hindurch}}} - \underbrace{\oint_{\partial V} p\mathbf{v} \cdot d\sigma}_{\substack{\text{Arbeit, die von den Druck-} \\ \text{kräften an der Flüssigkeit} \\ \text{innerhalb von } V \text{ geleistet} \\ \text{wird}}}$$

**Bemerkung:** Bei einer Masse leistet eine Kraft  $\mathbf{F}$  pro Zeiteinheit die Arbeit  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$   
während dt

(vgl. die obige Formel).

**Definition 12**

Sei zur Zeit  $t$  das Vektorfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{B}$  gegeben.

- (i) Eine *Stromlinie* zur Zeit  $t$  ist eine Integralkurve von  $\mathbf{v}(\cdot, t)$ .  
Präzise: Falls  $s$  die Stromlinie  $\mathbf{x}(s)$  parametrisiert ( $s$ =Bogenlänge), so gilt bei gegebenem  $t$  der Kurve entlang

$$\frac{d}{ds}\mathbf{x}(s) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(s), t).$$

- (ii) Eine *Trajektorie* (bzw. Bahnlinie)  $\mathbf{x}(t)$  ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)$$

mit gegebener Anfangsbedingung.

- (iii) Die Trajektorie (ii) liefert die *Bahn* eines Flüssigkeitsteils, (i) dagegen nicht:

$$d\mathbf{x} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 \Leftrightarrow \frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3}$$

- (iv) Beide sind identisch, falls

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

d.h. für einen *stationären* Fluss.

**Satz 13 (Theorem von Daniel Bernoulli)**

In einem *stationären* isentropen Fluss ist

$$\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + w + \gamma, \quad (\mathbf{g} = -\nabla\gamma)$$

entlang der Stromlinien konstant. Falls wir  $w$  durch  $p/\rho$  ersetzen, gilt das Gleiche für einen homogenen ( $\rho(t) \equiv \rho_0$ ) inkompressiblen Fluss.

**Beweis:**

Wir nehmen o.B.d.A an, dass  $\gamma = 0$  ist. Es gilt:

$$\frac{1}{2}\nabla\mathbf{v}^2 = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}$$

Wenn wir die Euler-Gleichung für isentrope Flüssigkeiten

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\partial_t\mathbf{v} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stationär}}}{\nabla w} = -\nabla w$$

einsetzen, so erhalten wir:

$$\nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + w \right) = \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} \perp \mathbf{v}$$

Sei  $\mathbf{x}(s)$  nun eine Stromlinie, damit:

$$\left[ \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + w \right]_{\mathbf{x}(s_1)}^{\mathbf{x}(s_2)} = \int_{\mathbf{x}(s_1)}^{\mathbf{x}(s_2)} \nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + w \right) \cdot d\mathbf{x}(s) = \int_{\mathbf{x}(s_1)}^{\mathbf{x}(s_2)} (\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{x}(s)$$

mit der obigen Definition sehen wir

$$d\mathbf{x}(s) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(s), t) ds = \mathbf{v}(\mathbf{x}(s)) ds \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{x}(s) \parallel \mathbf{v}(\mathbf{x}(s))$$

↑  
stationär

Also ist das das Linienintegral

$$\int_{\mathbf{x}(s_1)}^{\mathbf{x}(s_2)} (\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{x}(s) = 0$$

und damit gilt:

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + w = \text{const}$$

□

## 2.6 Beispiel, das zeigt, dass etwas faul ist

Eine inkompressible ( $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ ) und homogene ( $\rho(\mathbf{x}) = \text{const}$ ) Flüssigkeit bleibt für alle Zeiten  $t > 0$  homogen. Wir betrachten eine inkompressible homogene Flüssigkeit, die in der  $xy$ -Ebene liegt und sich nur entlang der  $x$ -Achse bewegt. Es gilt also:

$$\mathbf{v}(x, y, t) = \begin{pmatrix} v(x, t) \\ 0 \end{pmatrix} \perp \mathbf{n} \quad \text{und} \quad p(x, y, t) = p(x)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_x v = 0 \quad \underset{\text{Euler}}{\Rightarrow} \quad \rho_0 \partial_t v = -\partial_x p \quad \Rightarrow \quad \rho_0 \partial_x \partial_t v = -\partial_x^2 p = 0$$

Wir wählen für den Druck den Ansatz  $p(x) = a + b(x)$ , mit

$$p(x) = p_1 - \left( \frac{p_1 - p_2}{L} \right) x$$

erfüllen wir die Randbedingungen. Wir kehren zur Euler-Gleichung zurück:

$$\partial_t v = -\rho_0^{-1} \partial_x p = \frac{p_1 - p_2}{\rho_0 L} \Rightarrow v(t) = \underbrace{\frac{p_1 - p_2}{\rho_0 L}}_{>0} t + v_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$$

was wohl Unfug ist und nur durch die Vernachlässigung der Reibung eintritt. Dies wird mit Hilfe der *Navier-Stokes-Gleichungen* behoben.

## 2.7 Zusammenfassung

Die Euler'schen Gleichungen wurden mittels Erhaltungssätzen hergeleitet:

- I. Massenerhaltung
- II. Impulserhaltung (mit Quelltermen, wenn nötig)
- III. Energieerhaltung (mit Quelltermen, wenn nötig)

Die Resultate sind:

1. Inkompressible Flüssigkeiten:

$$D_t \rho = 0, \quad \rho D_t \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ und } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial B} = 0$$

2. Isentrope Flüssigkeiten mit  $\rho^{-1} \nabla p = \nabla w$ :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad D_t \mathbf{v} = -\nabla w + \mathbf{g}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial B} = 0$$

Wir haben vier Gleichungen für fünf Unbekannte:  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $p$ . Mit der Zustandsgleichung  $p = p(\rho)$  gibt es eine Lösung, falls  $p'(\rho) > 0$

Die Energieerhaltung *an sich* liefert herzlichst wenig.

# Kapitel 3

## Die Navier-Stokes-Gleichungen (1822/1845)

Betrachten wir die ebene Fläche  $S$  und eine Flüssigkeit, die unterhalb von  $S$  die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , oberhalb  $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$  hat. Bis jetzt war das in einer *idealen* Flüssigkeit bestens und nichts würde sich ändern.

In *realen* Flüssigkeiten ist dem nicht mehr so: die schnelleren Moleküle *diffundieren* nach unten und beschleunigen durch Zusammenstöße die langsameren, während umgekehrt die langsameren *nach oben diffundieren* und da die schnelleren verzögern. Die Folge ist eine Reibung bzw. eine Zähigkeit der Flüssigkeit, die sich über kurze Abstände auswirkt.

Es gibt also eine Kraft auf  $dA$  pro Flächeneinheit, die gleich  $-p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} + \underbrace{\sigma(\mathbf{x}, t)}_{\text{Zähigkeitsspannungstensor}}\mathbf{n}$  ist.

Somit gilt:

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho \mathbf{v} d^3x = \int_{\partial W_t} (-p\mathbf{1} + \sigma)\mathbf{n} dA + \int_{W_t} \rho \mathbf{g} d^3x$$

Der so genannte Zähigkeitsspannungstensor  $\sigma$  steht für den Einfluss molekularer Wechselwirkung, also einer Wechselwirkung *kurzer* Reichweite.

### 3.1 Eigenschaften des Zähigkeitsspannungstensors $\sigma$

#### Satz 14 (Cauchys Theorem (1827))

Sei  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n})$  die Kraft pro Flächeneinheit an der Stelle  $\mathbf{x}$  zur Zeit  $t$  und sei  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n})$  stetig. Dann ist die Abbildung  $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n})$  linear in  $\mathbf{n}$ .

**Beweis:**

Bekanntlich gilt „Actio gegengleich Reactio“. Also

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t; -\mathbf{n}) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) \quad (3.1)$$

Betrachten wir nun mit Cauchy ein Tetraeder mit linearer Dimension  $L$ . Dank des Transport-Theorems (2.8) ergibt sich

$$\int_{W_t} \rho D_t \mathbf{v} d^3x = \int_{\partial W_t} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) dA + \int_{W_t} \rho \mathbf{g} d^3x$$

Die beiden Volumenintegrale skalieren wie  $L^3$  für  $L \rightarrow 0$ . Falls wir nun mit  $L^{-2}$  multiplizieren und den Limes  $L \rightarrow 0$  nehmen, erhalten wir:

$$\lim_{L \rightarrow 0} L^{-2} \int_{W_t} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) dA = 0$$

Wir können uns diesen Limes o.B.d.A. als eine *Skalierung* vorstellen, welche die Form *invariant* lässt. Über die Flächen integrierend erhalten wir somit

$$\mathbf{f}(\mathbf{n}) + n_1 \mathbf{f}(-\mathbf{e}_1) + n_2 \mathbf{f}(-\mathbf{e}_2) + n_3 \mathbf{f}(-\mathbf{e}_3) = 0$$

da für die Flächen des Tetraeders, auf denen die Basisvektoren senkrecht stehen (Fläche( $\mathbf{e}_i$ )),

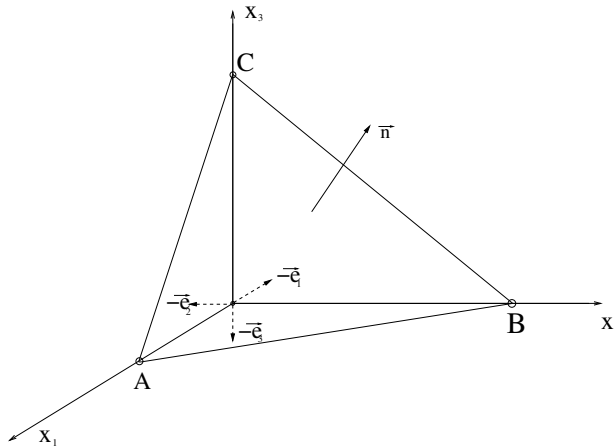


Abbildung 3.1: ??

folgende Beziehung zur Fläche des Dreiecks  $\triangle ABC$  gilt:

$$\text{Fläche}(\mathbf{e}_i) = n_i \text{Fläche}(\triangle ABC)$$

Das sieht man, da aus der Normierung des Einheitsvektors  $\mathbf{n}$

$$\|\mathbf{n}\|^2 = \sum_{i=1}^3 n_i^2 = 1$$

für die Projektionen  $n_i = \cos \gamma_i$  folgt und für den Tetraeder gilt:

$$\text{Fläche}(\mathbf{e}_i) = \cos \gamma_i \cdot \text{Fläche}(\triangle ABC)$$



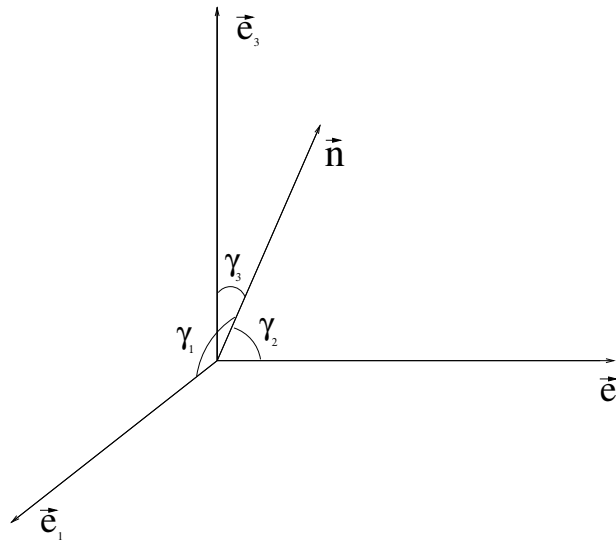


Abbildung 3.2: ??

Mittels „Actio gegenleich Reactio“ (3.1) und *Stetigkeit*

$$\mathbf{f}(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{f}(\mathbf{e}_i) =: M\mathbf{n}$$

Wir definieren  $\sigma$  so, dass für die eben definierte Matrix  $M$  gilt:

$$M =: -p\mathbb{1} + \sigma$$

Oben waren die  $n_i > 0$ ; mutatis mutandis in anderen Oktanten.  $\square$

**Bemerkung:** Falls die Substanz *homogen* ist, hängt  $M$  nicht mehr von  $\mathbf{x}$  ab, ohne globale Kompression oder Ausdehnung auch nicht von  $t$ ; vgl. *inkompressible Flüssigkeiten*.

#### Satz 15

Der Zähigkeitsspannungstensor  $\sigma$  ist symmetrisch. Es gilt also  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

#### Beweis:

Wir betrachten den Bereich  $W$ , auf den das Drehmoment

$$\int_W \mathbf{r} \times \mathbf{f}_V d^3x$$

wirkt.  $\mathbf{f}_V$  ist hier die *Volumenkraftdichte*, im Gegensatz zur weiter oben definierten *Flächenkraftdichte*  $\mathbf{f}$ . Das können wir als antisymmetrischen Tensor  $M$  schreiben

$$M_{ik} = \int_W (f_{Vi}x_k - f_{Vk}x_i) d^3x$$

Für  $M$  muss außerdem

$$M_{ik} = \int_W (f_{Vi}x_k - f_{Vk}x_i) d^3x = \int_{\partial W} \sum_j (\sigma_{ij}x_k - \sigma_{kj}x_i) dA_j$$

gelten, weil das Drehmoment *nur* auf die Oberfläche wirkt.  
Nun ein kleines

**Lemma 16**

Wenn die Kräfte auf ein Volumenelement nur über die Oberfläche wirken, lässt sich die Volumenkraftdichte  $\mathbf{f}_V$  als

$$f_{Vi} = \sum_k \partial_k \sigma_{ik} = \operatorname{div} \sigma_i$$

schreiben. Hier ist  $\sigma_i$  die  $i$ -te Zeile von  $\sigma$ .

**Beweis:**

$$\int_W \mathbf{f}_V d^3x = \int_{\partial W} \mathbf{f} dA = \int_{\partial W} \sigma \mathbf{n} dA = \int_{\partial W} \sum_k \sigma_{ik} n_k dA = \int_{\partial W} \sigma_i \cdot \mathbf{n} dA$$

Wir formen weiter um

$$\int_W \mathbf{f}_V d^3x = \int_{\partial W} \sigma_i \cdot \mathbf{n} dA \stackrel{\uparrow \text{Gau\ss}}{=} \int_W \operatorname{div} \sigma_i d^3x = \int_W \sum_k \partial_k \sigma_{ik} d^3x$$

Also gilt

$$\int_W \mathbf{f}_V d^3x = \int_W \sum_k \partial_k \sigma_{ik} d^3x$$

und damit

$$f_{Vi} = \sum_k \partial_k \sigma_{ik}$$

□

Dieses Lemma setzen wir sogleich in den Ausdruck für den antisymmetrischen Tensor  $M$  ein.

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \int_W \left[ \left( \sum_j \partial_j \sigma_{ij} \right) x_k - \left( \sum_j \partial_j \sigma_{kj} \right) x_i \right] d^3x = \\ &= \int_W \sum_j \partial_j (\sigma_{ij}x_k - \sigma_{kj}x_i) d^3x - \int_W (\sigma_{ik} - \sigma_{ki}) d^3x \stackrel{\uparrow \text{Gau\ss}}{=} \end{aligned}$$

$$\int_{\partial W} \sum_j (\sigma_{ij} x_k - \sigma_{kj} x_i) dA_j - \int_W (\sigma_{ik} - \sigma_{ki}) d^3x$$

Mit

$$\int_{\partial W} \sum_j (\sigma_{ij} x_k - \sigma_{kj} x_i) dA_j = \int_W (f_{Vi} x_k - f_{Vk} x_i) d^3x = M_{ik}$$

von oben folgt

$$\int_W (\sigma_{ik} - \sigma_{ki}) d^3x = 0$$

und damit  $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ , also die Symmetrie des Zähigkeitsspannungstensors.

□

Die nächsten beiden Eigenschaften stellen Axiome dar, welche für die meisten Medien richtig sind.

- (a)  $\sigma$  hängt *linear* von  $\partial \mathbf{v}$ , der ersten Ableitung von  $\mathbf{v}$  nach  $\mathbf{x}$  (eine  $3 \times 3$ -Matrix) ab. Wenn das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  homogen ist, so ist  $\partial \mathbf{v} \equiv 0$ . Es gibt also keine Reibung. Solche Fluide heißen Newton'sche Fluide. Ein Gegenbeispiel wäre etwa Plastilin.
- (b)  $\sigma$  ist invariant unter Rotationen, d.h. es liegt *Isotropie* vor.

$$\underbrace{\sigma(O \partial \mathbf{v} O^{-1})}_{\text{Fluss rotiert}} = \underbrace{O \sigma(\partial \mathbf{v}) O^{-1}}_{\sigma \text{ rotiert}}$$

für beliebige orthogonale Transformationen  $O$ , scheint vernünftig.

### Satz 17

Der Zähigkeitsspannungstensor  $\sigma$  hat die Form  $\sigma = \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbb{1} + 2\mu \varepsilon$ , mit den beiden Viskositätskoeffizienten  $\lambda$  und  $\mu$ , sowie dem Deformationstensor  $\varepsilon$

**Beweis:**

**Erst mal intuitiv:**

$[\sigma, \partial \mathbf{v}] = 0$ , da  $\sigma$  eine lineare Funktion von  $\partial \mathbf{v}$  sei

$$\Rightarrow [\sigma^T, \partial \mathbf{v}^T] = [\sigma, \partial \mathbf{v}^T] = 0$$

so dass wir schreiben können:  $[\sigma, \varepsilon] = 0$ , wobei  $\varepsilon$  ein alter Bekannter ist, nämlich  $\varepsilon = \frac{1}{2} (\partial \mathbf{v} + \partial \mathbf{v}^T)$ .

$$\Rightarrow \sigma = \phi(\varepsilon) = \sum_i |\varepsilon_i\rangle \phi(\varepsilon_i) \langle \varepsilon_i|$$

da  $\sigma$  und  $\varepsilon$  die *gleichen* orthogonalen Eigenvektoren haben. Daraus folgt mit  $\phi(\varepsilon) = \tilde{\lambda}(\varepsilon) + 2\mu \varepsilon$  ( $\tilde{\lambda}(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  soll *linear* sein):

$$\sigma(\varepsilon) = \tilde{\lambda}(\varepsilon) \mathbb{1} + 2\mu \varepsilon$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}\sigma(O\varepsilon O^{-1}) &= O\sigma(\varepsilon)O^{-1} \Rightarrow \tilde{\lambda}(O\varepsilon O^{-1}) = \tilde{\lambda}(\varepsilon) \in \mathbb{R} \text{ f\"ur alle orthogonalen } O \\ &\Rightarrow \tilde{\lambda}(\varepsilon) = \lambda \operatorname{Tr} \varepsilon = \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}, \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ fest}\end{aligned}$$

**Nun formal:**

$$\sigma(\partial \mathbf{v})_{ij} = \sum_{kl} A_{ijkl} (\partial \mathbf{v})_{kl} = \sigma(\partial \mathbf{v})_{ji}$$

d.h. „Matrixmultiplikation“ im Raum der Matrizen. F\"ur jeden beliebigen isotropen Tensor vierter Stufe gilt (H. Jeffreys, Cartesian Tensors, Cambridge UP):

$$A_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu' \delta_{il} \delta_{jk} = A_{jikl}$$

$\sigma_{ij} \stackrel{\uparrow}{=} \sigma_{ji}$

$$\Rightarrow \mu = \mu' \text{ und } \sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \sum_k \partial_k v_k + \mu (\partial_i v_j + \partial_j v_i) \Rightarrow \sigma = \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbb{1} + 2\mu \varepsilon$$

□

Im Klartext

$$\sigma(\varepsilon) = \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbb{1} + 2\mu \varepsilon$$

oder mit folgender Umwandlung:

$$\sigma(\varepsilon) = \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbb{1} + 2\mu \varepsilon + \underbrace{\frac{2\mu}{3} (\operatorname{Tr} \varepsilon) \mathbb{1} - \frac{2\mu}{3} (\operatorname{Tr} \varepsilon) \mathbb{1}}_{=0} = 2\mu \left[ \varepsilon - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbb{1} \right] + \underbrace{\left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right)}_{\varphi} \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbb{1}$$

wo das eine oder andere nur noch Geschmackssache ist. Der Koeffizient  $\mu$  ist der erste *Viskosit\"atskoeffizient* und  $\lambda$  der zweite.

## 3.2 Ideale Fl\"ussigkeit als Beispiel

$\Rightarrow \mathbf{t}(\mathbf{n}) = -p(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}$ , so dass  $M = -p(\mathbf{x}, t) \mathbb{1}$  und  $\sigma \equiv 0$ . Wie wir gleich sehen werden, ergeben sich daraus sofort die Euler-Gleichungen.

Wir kehren nun zu

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho \mathbf{v} d^3x \stackrel{(2.8)}{\uparrow} \int_{\partial W_t} \rho D_t \mathbf{v} d^3x = \int_{\partial W_t} (-p \mathbb{1} + \sigma) \mathbf{n} d\mathbf{A} + \int_{W_t} \rho \mathbf{g} d^3x$$

zur\"uck und betrachten die  $i$ -te Komponente:

$$\int_{W_t} (-\partial_i p + \rho g_i + \sum_k \partial_k \sigma_{ik}) d^3x$$

für alle  $W_t$ , wobei

$$\sum_k \partial_k \sigma_{ik} = \sum_k \partial_k [\lambda \operatorname{div} \mathbf{v} \delta_{ik} + \mu (\partial_i v_k + \partial_k v_i)] =$$

$$\lambda \partial_i \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \partial_i \sum_k \partial_k v_k + \mu \sum_k \partial_k \partial_k v_i = (\lambda + \mu) \partial_i \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \Delta v_i$$

ist.

Somit erhalten wir die *Navier-Stokes*-Gleichungen (1822/1845):

$$\boxed{\rho D_t \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \Delta \mathbf{v}}$$

die man zusammen mit der Kontinuitätsgleichung  $D_t \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  lösen sollte. Dazu kommen die *Randbedingungen* (RB), die ein separates Kapitel bilden, sowie eine Zustandsgleichung oder Ähnliches, siehe Energie-Betrachtungen.

**Bemerkung:** Die Navier-Stokes-Gleichungen haben sich *ausgiebigst* bewährt. Dabei sind  $\lambda$  und  $\mu$  Materialkonstanten, die eine Flüssigkeit oder ein Gas charakterisieren und lokal von  $T$  abhängen können.

### 3.3 Weiteres Beispiel

Inkompressible Flüssigkeit mit  $\rho = \rho_0$

$$\Rightarrow D_t \mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{\mu}{\rho_0} \Delta \mathbf{v} =: \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}$$

$$\text{und } \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

mit  $\nu := \frac{\mu}{\rho_0}$ , der *kinematischen Viskosität*

Randbedingungen: Dank des Terms  $\nu \Delta \mathbf{v}$  (2. Ordnung) muss sich auch die Zahl der Randbedingungen um eins erhöhen.

Tut sie auch:  $\mathbf{v}|_{\partial \mathbb{B}} = 0$  ersetzt  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|_{\partial \mathbb{B}} = 0$ . Nicht nur die normale, sondern auch die tangentielle Komponente der Geschwindigkeit verschwindet, dies ist die so genannte *no-slip condition*. Wir werden uns noch ausgiebig mit der Grenzschicht-Theorie befassen; sie spielt in der *Mikro-Rheologie* eine wichtige Rolle.

**Bemerkung:** Schon bei einer inkompressiblen Flüssigkeit gibt es mathematisch für  $t \rightarrow \infty$  schwierige *ungelöste* Probleme: Man zeige, dass bei gegebenen Randbedingungen eine Lösung existiert, die *stetig* von den Anfangsbedingungen abhängen soll (well-posed problem). In 3D ist dies im Allgemeinen nur für kleine Zeitintervalle bekannt; in 2D für alle Zeiten  $t$ .

### 3.4 Reynoldssche Zahl (1883) und Ähnlichkeitstheorie (1895)

Osborne Reynolds arbeitete mit Glasröhren verschiedener Durchmesser und bei verschiedenem Druckgefälle und fand, dass abhängig vom Wert eines bestimmten Parameters  $Re$  die Strömung entweder *laminar* oder *turbulent* war. Dies zeigte er mittels gefärbter Flüssigkeitsfäden 1883 und fand im Jahre 1895 seine Zahl  $Re$ .

Sei  $L$  eine charakteristische Länge und  $V$  eine charakteristische Geschwindigkeit. Außerdem sei  $T = \frac{L}{V}$  die dadurch bestimmte Zeitskala; z.B., wenn man in einer Teetasse herumrührt, ist  $L \approx 5\text{cm}$ ,  $V \approx 5\frac{\text{cm}}{\text{s}}$  und damit  $T \approx 1\text{s}$  und nicht etwa  $L = 1\text{m}$ ,  $V = 100\frac{\text{m}}{\text{s}}$  und  $T = 10\text{ms}$ .

Wir definieren nun dimensionslose Größen

$$\mathbf{v}' := \frac{\mathbf{v}}{V}, \quad \mathbf{x}' := \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad t' := \frac{t}{T} \quad (3.2)$$

und betrachten die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen:

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{g} - \rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}$$

Für unsere Dimensionsbetrachtungen ist  $\mathbf{g}$  unwichtig, weshalb wir  $\mathbf{g} := 0$  setzen. Mittels (3.2) ergibt sich:

$$\begin{aligned} (T^{-1} \partial_t' + \underbrace{VL^{-1}}_{=T^{-1}} \mathbf{v}' \cdot \nabla') V \mathbf{v}' &= -\frac{1}{\rho L} \nabla' p + \nu L^{-2} V \Delta' \mathbf{v}' \\ \Rightarrow \underbrace{VT^{-1}}_{V^2 L^{-1}} (D_t' \mathbf{v}') &= -\frac{1}{\rho L} \nabla' p + \nu L^{-2} V \Delta' \mathbf{v}' \\ \Rightarrow D_t' \mathbf{v}' &= -\underbrace{\frac{1}{\rho V^2}}_{\nabla' p'} \nabla' p + \underbrace{\frac{\nu}{LV}}_{Re^{-1}} \Delta' \mathbf{v}' \end{aligned}$$

und da wir eine inkompressible Flüssigkeit betrachten, gilt nach wie vor  $\text{div}' \mathbf{v}' = 0$ . Hier ist

$$\boxed{Re := \frac{LV}{\nu}}$$

die *Reynoldssche Zahl*, die bei gleicher Geometrie bestimmt, ob zwei Lösungen identisch sind, da sie beide zwei identische Gleichungen befriedigen. Beachte, dass *alle* hier aufgeführten Größen *dimensionslos* sind.

Man sagt, zwei Systeme sind sich dynamisch *ähnlich*, wenn sie sich auf einem identischen Bereich  $\mathbb{B}$  zum gleichen dimensionslosen (gleiche Reynoldszahl  $Re$ ) System reduzieren lassen. Reynolds fand für Wasser, dass der Umschwung von laminar zu turbulent bei  $Re \approx 1000$  stattfindet;  $\mu_w = 10^{-2} \frac{\text{g}}{\text{cms}}$  und  $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$ . In der Mikrorheologie ist  $Re$  typischerweise etwa 1 (vgl. Physics Today VI (2001) 42-8.)

**Bemerkung:** Für Objekte, die zu klein oder zu groß für angenehmes Experimentieren sind (z.B. Flugzeugflügel), kann man durch Umskalieren ein für Strömungsexperimente bequemes Größenmaß erreichen.

# Kapitel 4

## Navier-Stokes für inkompressible Flüssigkeiten

Wir fangen mit einem allgemeinen Zerlegungssatz an; vgl. Sommerfeld §2

### 4.1 Zerlegungssatz (Stokes 1849/Helmholtz 1858)

#### Satz 18

Sei  $\mathbb{B}$  ein Bereich mit glattem Rand  $\partial\mathbb{B}$ .  
Jedes Vektorfeld  $\mathbf{w}$  kann man *eindeutig* in

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} + \nabla p \in L^2(\mathbb{B})$$

zerlegen, mit  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  und  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\mathbb{B}} = 0$ , d.h.  $\mathbf{v}$  ist parallel zum Rand.

**Bemerkung:** Man hätte auch sagen können:  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ , wo  $\operatorname{div} \mathbf{w}_1 = 0$  und  $\operatorname{rot} \mathbf{w}_2 = 0$ , sowie  $\mathbf{w}_1 \mathbf{n}|_{\partial\mathbb{B}} = 0$  ist.

#### Beweis:

Wir zeigen zuerst die Orthogonalität der Zerlegung im reellen Hilbertraum  $L^2(\mathbb{B})$  mit Skalarprodukt  $\langle f|g \rangle = \int_{\mathbb{B}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d^3x$ .

Weil

$$\operatorname{div}(p\mathbf{v}) = p \operatorname{div} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)p$$

ist, gilt

$$\int_{\mathbb{B}} \mathbf{v} \cdot \nabla p d^3x = \int_{\mathbb{B}} [\operatorname{div}(p\mathbf{v}) - \underbrace{p \operatorname{div} \mathbf{v}}_{=0}] d^3x = \int_{\mathbb{B}} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \stackrel{\uparrow \text{Gauß}}{\partial\mathbb{B}} = 0$$

Damit wird die Eindeutigkeit bewiesen:

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + \nabla p_1 = \mathbf{v}_2 + \nabla p_2 \Rightarrow 0 = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \nabla(p_1 - p_2)$$

Nun bilden wir das Skalarprodukt von  $\langle \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 |$  mit  $|\langle (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \nabla(p_1 - p_2) \rangle = |0\rangle$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{B}} [ \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|^2 + \underbrace{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \nabla(p_1 - p_2)}_{=0, \text{ s.o.}} d^3x ] = \\ &= \int_{\mathbb{B}} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|^2 d^3x \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \Rightarrow \underbrace{\nabla(p_1 - p_2)}_{=:C} = 0 \end{aligned}$$

Nun die Existenz der Zerlegung. Wir haben  $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \nabla p$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{w} = \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{v}}_0 + \Delta p$  und  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}|_{\partial \mathbb{B}} = (\mathbf{n} \nabla) p = \partial_n p$ . Sei  $\mathbf{w}$  gegeben, definiere  $p$  als Lösung des *Neumann*-Problems

$$\Delta p = \operatorname{div} \mathbf{w} \text{ in } \mathbb{B} \text{ mit } \partial_n p = (\mathbf{n} \nabla) p = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}|_{\partial \mathbb{B}}$$

Diese Lösung existiert (Courant-Hilbert II, Kap. 4) und ist bis auf eine additive Konstante eindeutig. Also ist  $\mathbf{v} := \mathbf{w} - \nabla p$ , so dass  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{w} - \Delta p = 0$ , *dank Konstruktion*, sowie  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial \mathbb{B}} = 0$ .  $\square$

Dank des Theorems lässt sich jedes Vektorfeld in ein Gradientenfeld und ein divergenzfreies Feld, das parallel zum Rand ist, zerlegen. Beide sind in  $L^2(\mathbb{B})$  orthogonal zueinander. Sei nun  $P$  der Projektionsoperator, der zum *divergenzfreien* Teil gehört, so dass

$$\mathbf{w} = P\mathbf{v} + \nabla p,$$

$$P\mathbf{v} = \mathbf{v} \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ und } \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|_{\partial \mathbb{B}} = 0, \text{ sowie } P(\nabla p) = 0$$

$\uparrow$   
 $\partial_t \mathbf{v}$  genügt diesen Gleichungen auch

Wir wenden den linearen Operator  $P$  auf die Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Flüssigkeiten an:

$$[\partial_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)] \mathbf{v} = -\nabla p + R^{-1} \Delta \mathbf{v} \Rightarrow \partial_t \mathbf{v} = P[-(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + R^{-1} \Delta \mathbf{v}]$$

Dies ist eine Gleichung für  $\mathbf{v}$  *allein*, da  $p$  sich verabschiedet hat. Es gilt zwar  $\operatorname{div}(\Delta \mathbf{v}) = 0$ , aber  $\Delta \mathbf{v}$  muss *nicht* parallel zu  $\partial \mathbb{B}$  sein. Das Problem der Turbulenz ist, dass zwar  $Re^{-1} \ll 1$ , aber man kann diesen Term nicht vernachlässigen, da es sonst gar keine Turbulenz mehr geben würde ... Außerdem ist das Ganze *numerisch* heikel mit  $Re^{-1} \ll 1$ . Dazu,  $Re^{-1} \Delta \mathbf{v} \Rightarrow \operatorname{RB} \mathbf{v}|_{\partial \mathbb{B}} = 0$  statt  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|_{\partial \mathbb{B}} = 0$

## 4.2 Energiebetrachtung

Wie sieht's mit der Energie aus? Physikalisch sollte wegen der Reibung ( $\mu \neq 0$ )

$$\frac{d}{dt} E_{kin} \leq 0$$



sein. Also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{kin} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 d^3x \stackrel{\mathbb{B}_t = \mathbb{B}}{\stackrel{(2.8)}{=}} \int_{\mathbb{B}} \rho \underbrace{D_t \frac{1}{2} \mathbf{v}^2}_{\mathbf{v} D_t \mathbf{v}} d^3x = \\ &= \int_{\mathbb{B}} \mathbf{v} (\rho D_t \mathbf{v}) d^3x \stackrel{\uparrow}{=} \int_{\mathbb{NS}} \mathbf{v} (\rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}) d^3x \end{aligned}$$

Aus der Inkompressibilität folgt  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  und  $\rho = \rho_0$ . Desweiteren definieren wir uns einen modifizierten Druck, der die Gravitation enthält:  $\mathbf{g} = -\nabla \gamma \Rightarrow p_m := p + \rho \gamma$

$$\frac{d}{dt} E_{kin} = \int_{\mathbb{B}} \mathbf{v} (-\nabla p_m + \mu \Delta \mathbf{v}) d^3x = - \int_{\mathbb{B}} \mathbf{v} \cdot \nabla p_m + \int_{\mathbb{B}} \mathbf{v} \mu \Delta \mathbf{v} d^3x$$

Oben haben wir gezeigt, dass für  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  und  $\mathbf{v}|_{\partial \mathbb{B}} = 0$

$$\int_{\mathbb{B}} \mathbf{v} \cdot \nabla p_m d^3x = 0$$

ist. Es bleibt also

$$\frac{d}{dt} E_{kin} = \int_{\mathbb{B}} \mathbf{v} \mu \Delta \mathbf{v} d^3x$$

übrig, was wir mit Hilfe der Identität

$$\operatorname{div} \sum_{ij} v_i \partial_j v_i \mathbf{e}_j = (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v}$$

folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{kin} &= \mu \int_{\mathbb{B}} \left( \operatorname{div} \mathbf{v} \sum_{ij} v_i \partial_j v_i \mathbf{e}_j - (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 \right) d^3x \stackrel{\uparrow}{=} \mu \int_{\mathbb{B}} \left( \sum_{ij} v_i \partial_j v_i \mathbf{e}_j \right) \cdot \mathbf{n} d\sigma - \mu \int_{\mathbb{B}} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 d^3x \\ &= -\mu \int_{\mathbb{B}} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 d^3x \leq 0 \end{aligned}$$

Das linke Integral verschwindet wegen  $\mathbf{v}|_{\partial \mathbb{B}} = 0$ .

Die Energiedissipation ist also genau dann 0, wenn entweder  $\mu = 0$  ist, d.h. wenn wir keine Reibung haben, oder wenn  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  ist, also wenn das Geschwindigkeitsfeld quellfrei ist.

Da, wie oben schon bemerkt, stets  $\frac{d}{dt} E_{kin} \leq 0$  gelten muss, gilt auch  $\mu \geq 0$ .

### 4.3 Schlussbetrachtungen

- Der Druck ist eine Hilfsgröße, z.B. gilt in einer *inkompressiblen* Flüssigkeit oft gar nicht  $p = p(\rho)$ , da  $\rho = \rho_0$  fest ist, aber

$$\nabla p = (1 - P)[-(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + Re^{-1}\Delta\mathbf{v}]$$

ist in der Regel ungleich 0 und eine bekannte Größe, sobald  $\mathbf{v}$  als Lösung von

$$\partial_t \mathbf{v} = P[-(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + Re^{-1}\Delta\mathbf{v}]$$

bekannt ist. Klar, dass  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  hier wesentlich war.

### 4.4 Die Stokes-Gleichungen und Stokes' Paradox

- **Stokes-Gleichungen**

Sei  $Re \ll 1 \Leftrightarrow Re^{-1} = \frac{\mu}{LV\rho} = \frac{\nu}{LV} \gg 1$ , wir haben es also mit einer zähen Flüssigkeit und kleinen Geschwindigkeiten und Abmessungen zu tun. Dann liegt es nahe den Konvektionsstrom  $-(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  zu vernachlässigen und

$$\partial_t \mathbf{v} = P(Re^{-1}\Delta\mathbf{v})$$

zu lösen, d.h. die Stokes-Gleichungen (1851).

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla p + R^{-1}\Delta\mathbf{v} \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

Dies sind *lineare* partielle Differentialgleichungen vom *parabolischen* Typ. Im  $\mathbb{R}^3$  ist alles bestens, nicht so im  $\mathbb{R}^2$ .

- **Stokes' Paradox**

Es gibt *keine* Lösung der Stokes-Gleichungen im  $\mathbb{R}^2$  im *komplementären* Bereich eines Kreises mit vernünftigen Randbedingungen.

Dies tritt weder bei *Navier-Stokes*, noch bei den Gleichungen, die *Oseen* 1910 für eine sich in einer Flüssigkeit mit konstanter Geschwindigkeit bewegenden Kugel vorgeschlagen hat, auf.

### 4.5 Hagen (1837)-Poiseuille (1849)-Strömung

Wir betrachten eine *stationäre* (also eine zeitlich konstante), viskose und *inkompressible* Strömung entlang der  $x_1$ -Achse zwischen zwei Platten, nämlich den Ebenen  $\{x_3 = 0\}$

und  $\{x_3 = 1\}$ . Wir müssen auch deren Existenz zeigen, außerdem vernachlässigen wir die Gravitation. Navier-Stokes:

$$\rho[\partial_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)]\mathbf{v} = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{v} \Rightarrow \nabla p = \begin{pmatrix} \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow p = p(x_1)$$

Außerdem gilt:

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \text{ und } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v(x_1, x_3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

mit folgenden Randbedingungen:

$$v(x_1, 0) = v(x_1, 1) = 0, \text{ sowie } p(0) = p_1 > p(L) = p_2$$

Die physikalische Interpretation dieser Randbedingung für  $v$  ist, dass die Anziehung der Flüssigkeitsmoleküle untereinander schwächer ist, als die Anziehung zwischen den Molekülen und dem Rohr. Deshalb adsorbieren die Moleküle am Rohr und bilden so eine *dünne* unbewegliche Schicht aus, mit der die restlichen Moleküle nach der Navier-Stokes-Gleichung wechselwirken. Diese können wir nun wesentlich vereinfachen:

$$\rho v \partial_1 v = -\partial_1 p + \mu (\partial_1^2 + \partial_3^2) v$$

mit  $\partial_1 v = \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \Rightarrow v(x_1, x_3) = v(x_3)$  erhalten wir

$$0 = - \underbrace{\partial_1 p}_{x_1\text{-abh.}} + \mu \underbrace{\partial_3^2 v}_{x_3\text{-abh.}}$$

Es gibt demnach eine Konstante  $G$  mit  $G = -\partial_1 p = \mu \partial_3^2 v$ . Also ist

$$p(x_1) = C - Gx_1 = p_1 - \underbrace{\frac{\Delta p}{L}}_{\text{RB}} x_1$$

mit  $\Delta p = p_1 - p_2 > 0$ . Nun haben wir für  $v$ :

$$\mu \partial_3^2 v = -\frac{\Delta p}{L}$$

und damit:

$$v(x_3) = \mu^{-1} x_3(1 - x_3) \frac{\Delta p}{2L}$$

also eine Parabel.

Im Klartext, wir haben einen *stationären* Zustand bekommen, dessen *Stabilität* wir noch nicht verifiziert haben. Die Idee zur Klärung dieser Frage ist folgende:

$$\partial_t \mathbf{v} =: F(\mathbf{v}, t) \text{ und } F(\mathbf{a}, t) = 0$$

Wenn das für alle Zeiten  $t$  gilt, ist  $\mathbf{a}$  ein Fixpunkt. Um zu prüfen, ob  $\mathbf{a}$  ein Fixpunkt ist, linearisieren wir  $F(\mathbf{v}, t)$  um  $\mathbf{a}$ . Dazu betrachten wir  $\mathbf{v}$  in einer Umgebung von  $\mathbf{a}$ , also

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kleine Störung}}}{\boldsymbol{\zeta}}$$

$$F(\mathbf{a} + \boldsymbol{\zeta}, t) = F(\mathbf{a}, t) + \partial F(\mathbf{a}, t)\boldsymbol{\zeta} + \dots$$

Daraus folgt mit  $\partial_t \mathbf{v} = \partial_t \boldsymbol{\zeta} = F(\mathbf{v}, t)$

$$\partial_t \boldsymbol{\zeta} = \partial F(\mathbf{a}, t)\boldsymbol{\zeta}$$

Wir haben also eine eher simple Differentialgleichung für  $\boldsymbol{\zeta}$ , deren Lösung wir sofort hinschreiben können:

$$\boldsymbol{\zeta}(t) = \boldsymbol{\zeta}(0) \exp[\partial F(\mathbf{a})t]$$

Wenn  $\mathbf{a}$  stabil ist, sind die Realteile der Eigenwerte von  $\partial F(\mathbf{a})$  negativ, es muss also  $\operatorname{Re}\lambda(\partial F(\mathbf{a})) < 0$  gelten.

**Bemerkung:**

- Die Linearisierung lässt sich exakt begründen, was aber viel Arbeit ist.
- Die spannende Frage ist hier: Was ist mit p?

*Hagen* und *Poiseuille*, der als Arzt Blutströmungen untersuchte, führten Experimente an Strömungen in Röhren durch, d.h. an laminarer Rohrströmung ( $Re < Re_c$ ). Wir betrachten also nun eine viskose Strömung durch ein Rohr mit dem Radius  $a$ . Um dieses Problem zu lösen, müssen wir im Gegensatz zu vorher in drei Dimensionen rechnen. Wir schreiben deshalb die Navier-Stokes-Gleichungen in Zylinderkoordinaten um. Die  $x_1$ -Achse wird zur  $z$ -Achse.

$$\rho[\partial_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)]\mathbf{v} = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{v}$$

Wir setzen einen inkompressiblen Fluss in  $z$ -Richtung an, der rotationsinvariant und symmetrisch bezüglich Translationen in  $z$ -Richtung ist. Da der Zustand stationär ist, können wir schreiben:

1.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v(r, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v(r) \end{pmatrix}$$

2.

$$\partial_r p = \partial_\varphi p = 0 \Rightarrow p = p(z)$$

3.

$$\Delta = \partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_\varphi^2 + \partial_z^2 = \partial_r^2 + r^{-1}\partial_r$$

wegen Rotationsinvarianz und Translationsinvarianz.

Wir zeigen, dass die Kontinuitätsgleichung, in diesem Falle  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , erfüllt ist:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = r^{-1} \underbrace{\partial_r(rv_r)}_{=0} + r^{-1} \underbrace{\partial_\varphi v_\varphi}_{=0} + \underbrace{\partial_z v}_{=0} = 0$$

Die Navier-Stokes-Gleichungen nehmen folgende Gestalt an und beachten die Translationsinvarianz

$$\rho \partial_z v = -\partial_z p + \mu(\partial_r^2 + r^{-1} \partial_r)v \Rightarrow 0 = -\partial_z p + \mu(\partial_r^2 + r^{-1} \partial_r)v$$

Also bleibt

$$\underbrace{-\partial_z p}_{z\text{-abh.}} + \underbrace{\mu(\partial_r^2 + r^{-1} \partial_r)v}_{r\text{-abh.}} = 0$$

Es muss also eine Funktion  $G(t)$  mit

$$-\partial_z p = G(t)$$

und

$$\mu(\partial_r^2 + r^{-1} \partial_r)v = -G(t)$$

geben und da der Zustand stationär ist, gilt  $G(t) = G$ . Für den Druck bleibt alles wie beim vorherigen zweidimensionalen System:

$$\Delta p := p_1 - p_2 > 0 \Rightarrow p(z) = p_1 - \frac{\Delta p}{L}z, \text{ mit } G = \frac{\Delta p}{L}$$

Für  $v$  haben wir nun:

$$\Delta v = (\partial_r^2 + r^{-1} \partial_r)v = -\frac{G}{\mu}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + r^{-1} \frac{d}{dr} \right) v = -\frac{G}{\mu}$$

lautet

$$v(r) = \frac{G}{4\mu} \left( \underbrace{-r^2}_{\text{spezielle Lösung}} + \underbrace{A \ln r + B}_{\text{Lösung der homogenen Gleichung}} \right)$$

- Bei  $r = 0$  darf es keine Singularität geben, also muss  $A = 0$  sein.
- Bei  $r = a$  ist aufgrund der Randbedingungen die Tangentialgeschwindigkeit null, und damit ist  $B = a^2$ .

Aus diesen beiden Punkten folgt:

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L} (a^2 - r^2)$$

also eine Parabel mit  $0 \leq r \leq a$ . Nun führen wir eine neue Größe ein, nämlich den Flux:

**Definition 19**

Der Flux  $Q$  ist die Masse, die pro Sekunde *durch die Röhre* strömt

Mathematisch formuliert sieht das so aus:

$$Q = \rho 2\pi \int_0^a v(r) r dr$$

Setzen wir die oben ermittelte Funktion für  $v(r)$  ein:

$$Q = \frac{\rho\pi\Delta p}{2\mu L} \int_0^a (ra^2 - r^3) dr = \frac{\rho\pi\Delta p}{2\mu L} \left[ \frac{r^2 a^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{\rho\pi\Delta p a^4}{8\mu L}$$

Was Hagen und Poiseuille bei Wasser mit konstanter Druckdifferenz  $\Delta p$  gefunden haben, war  $Qa^{-4} = \text{const}$

**Bemerkung:**

- (i)  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  ist die Änderung von  $\mathbf{v}$  in die Richtung von  $\mathbf{v}$ , d.h. parallel zu  $\mathbf{e}_z$  und muss damit null sein, solange räumliche Homogenität und damit Translationsinvarianz bezüglich der  $\mathbf{e}_z$ -Achse gilt.
- (ii)  $\rho$  spielt (noch) keine Rolle, da die totale Beschleunigung null ist.
- (iii) Für einen *beliebigen* Röhrenquerschnitt studiere man

$$-\partial_3 p + \underbrace{\mu \Delta_2}_{\text{2-dim. Laplace-Operator} \rightarrow v(\text{Fläche} \perp \mathbf{e}_z)} v = 0$$

- (iv) Bei einer schiefen Röhre (z.B. um den Winkel  $\alpha$  gekippt) benötigt man den modifizierten Druck  $p' = p + \rho g \cos \alpha x_3$

## 4.6 Deformation eines Festkörpers

Wir werden nun sehen, dass die mathematischen Überlegungen zur Herleitung der Navier-Stokes-Gleichungen (soweit möglich) genauso für einen Festkörper verwendet werden können, *vorausgesetzt*, man ersetzt das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  durch ein Verzerrungs- oder *Deformationsfeld*  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ :

Wir wissen von der Fluidodynamik:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{B}_t} \rho \mathbf{v} d^3x \stackrel{(2.8)}{=} \int_{\mathbb{B}_t} \rho D_t \mathbf{v} d^3x = \int_{\mathbb{B}_t} \rho \mathbf{g} d^3x + \int_{\partial \mathbb{B}_t} \underbrace{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}}_{\text{Cauchy}} dA$$

Nehmen wir die  $i$ -te Komponente, mit  $\boldsymbol{\sigma}_i = (\sigma_{ik}; 1 \leq k \leq 3)$ :

$$\int_{\partial \mathbb{B}_t} \left( \underbrace{\sum_k \sigma_{ik} n_k}_{=: \boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{n}} \right) dA \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\mathbb{B}_t} \underbrace{(\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_i)}_{=: \sum_k \partial_k \sigma_{ik}} d^3x$$

so dass für alle Bereiche  $\mathbb{B}$

$$\rho D_t \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}$$

gelten muss. Betrachten wir nun eine Deformation  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{u}$  mit  $\mathbf{u}$  „klein“, wie es in der Regel im Festkörper ist.

Als Ansatz wählen wir das *Hooke'sche Gesetz*:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\partial \mathbf{u}) = \sum_{kl} A_{ijkl} (\partial \mathbf{u})_{kl} = \sigma_{ji}$$

d.h. der Spannungstensor ist eine *lineare* Funktion von  $\partial \mathbf{u}$ .

Klar, bei einer homogenen Translation ist  $\partial \mathbf{u} \equiv 0$  und wir haben demnach keine Spannung. Der Spannungstensor hat folgende Eigenschaften

- Isotropie
- Symmetrie  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , wie gehabt, wegen der kurzreichweitigen Wechselwirkung.

Somit folgt aus der Relation  $\sigma_{ik} = \lambda \delta_{ik} \underbrace{\sum_j \partial_j u_j}_{\operatorname{div} \mathbf{u}} + \mu \underbrace{(\partial_i u_k + \partial_k u_i)}_{=: 2\varepsilon_{ik}, \text{ Deformationstensor}}$ , die wir oben zur Herleitung der Navier-Stokes-Gleichungen benutzt haben:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= \sum_k \partial_k \sigma_{ik} = \sum_k \partial_k \left[ \lambda \delta_{ik} \sum_j \partial_j u_j + \mu (\partial_i u_k + \partial_k u_i) \right] = \\ &= \lambda \underbrace{\sum_k \partial_k \delta_{ik}}_{\partial_i} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \underbrace{\partial_i \sum_k \partial_k u_k}_{\operatorname{div} \mathbf{u}} + \mu \underbrace{\sum_k \partial_k \partial_k u_i}_{\Delta u_i} = \\ &= (\lambda + \mu) \partial_i \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta u_i \end{aligned}$$

Nun weiter

$$\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{x} = \dot{\mathbf{u}} \Rightarrow D_t \mathbf{v} = D_t \dot{\mathbf{u}} = \partial_t \dot{\mathbf{u}} + \underbrace{(\dot{\mathbf{u}} \nabla) \dot{\mathbf{u}}}_{\mathcal{O}(u^2)} \approx \ddot{\mathbf{u}}$$

Die letzten beiden Ergebnisse setzen wir nun in die etwas weiter oben ermittelte Gleichung  $\rho D_t \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}$  ein und erhalten:

$$\boxed{\rho \ddot{\mathbf{u}} = \rho \mathbf{g} + \underbrace{(\lambda + \mu)}_{\text{Lamésche Module}} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u}}$$

Dies ist die Navier-Gleichung.

Vorläufig, d.h. im Folgenden, vernachlässigen wir  $\rho\mathbf{g}$ , wir setzen also, wie so oft,  $\mathbf{g} := 0$ . Da die obige Gleichung linear ist, werden wir mit  $\mathbf{g} \neq 0$  auch relativ leicht fertig.

Nach Stokes/Helmholtz ist

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D + \mathbf{u}_S$$

mit  $\operatorname{rot} \mathbf{u}_D = 0$  und  $\operatorname{div} \mathbf{u}_S = 0$ . Also gibt es ein Potential  $U$  mit  $\mathbf{u}_D = \nabla U$  und  $\mathbf{u}_S$  muss parallel zum Rand  $\partial\mathbb{B}$  sein. Diese Aufteilung von  $\mathbf{u}$  setzen wir nun in die Navier-Gleichung ein:

$$\begin{aligned} \rho(\ddot{\mathbf{u}}_D + \ddot{\mathbf{u}}_S) &= (\lambda + \mu) \underbrace{\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_D}_{\Delta \mathbf{u}_D} + \mu \Delta(\mathbf{u}_D + \mathbf{u}_S) \\ \Rightarrow \ddot{\mathbf{u}}_D + \ddot{\mathbf{u}}_S &= \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right) \Delta \mathbf{u}_D + \underbrace{\left( \frac{\mu}{\rho} \right)}_{\nu} \Delta \mathbf{u}_S \end{aligned}$$

Da  $\mathbf{u}_D$  und  $\mathbf{u}_S$  voneinander unabhängig sind, können wir die Gleichung für beide Felder einzeln lösen. Wir erhalten:

$$\ddot{\mathbf{u}}_D = \underbrace{\left( \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)}_{v_L^2} \Delta \mathbf{u}_D \quad \text{und} \quad \ddot{\mathbf{u}}_S = \underbrace{\left( \frac{\mu}{\rho} \right)}_{v_T^2} \Delta \mathbf{u}_S$$

also links die Wellengleichung für die Dilatation, einer longitudinalen Welle (D-Wave,  $v_L$ ) und rechts die Wellengleichung für die Scherung, einer transversalen Welle (S-Wave,  $v_T$ ). Man sieht, dass  $v_L > v_T$  ist.

Zur Lösung dieser Gleichungen schreiben wir sie noch einmal, indem wir die Geschwindigkeiten mit einbeziehen:

$$\ddot{\mathbf{u}}_D = v_L^2 \Delta \mathbf{u}_D \quad \text{und} \quad \ddot{\mathbf{u}}_S = v_T^2 \Delta \mathbf{u}_S$$

Wir setzen eine ebene Welle als Lösung an, wobei der Kreis  $\circ$  als Platzhalter für  $D$  oder  $S$ , bzw. für  $L$  und  $T$  bei den Geschwindigkeiten fungiert:

$$\mathbf{u}_\circ = \mathbf{A}_\circ \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \Rightarrow \underbrace{(k^2 v_\circ^2 - \omega^2)}_{\text{W-Gl.}} \mathbf{A}_\circ = 0 \Rightarrow \omega(k) = kv_\circ$$

Nun können wir noch aufgrund der Wirbel- und Quellenfreiheit herausfinden, wie  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{A}_\circ$  miteinander zusammenhängen.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u}_S = 0 &\Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_S = 0 \Rightarrow \text{Transversale Welle} \\ \operatorname{rot} \mathbf{u}_D = 0 &\Rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{A}_D = 0 \Rightarrow \text{Longitudinale Welle} \end{aligned}$$

#### 4.6.1 Erdbebenwellen als Beispiel

$$v_L = 6 - 13 \text{ km/s}, \quad \omega = 1 - 10 \text{ Hz}$$

$$v_T = 3.5 - 7 \text{ km/s}, \quad \omega = 0.1 - 1 \text{ Hz} \rightarrow \text{Rayleigh - Welle (1885) : 2D!}$$

Dieser Welle werden wir später noch als Wasserwelle begegnen.



## 4.7 Stokes'sche Bewegung und Widerstandsformel

Stokes hat 1851 eine Lösung für die „schleichende“ Bewegung einer Kugel angegeben, die sich mit *gleichmäßiger* Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  in einer zähen Flüssigkeit der Dichte  $\rho$  bewegt. Daraus ergibt sich im  $\mathbb{R}^3$  die Stokes'sche Widerstandsformel für eine Kugel mit Radius  $a$ :

$$F_W = 6\pi\mu a u$$

Hier bestimmt sich  $u$  aus dem Kräftegleichgewicht

$$6\pi\mu a u = \frac{4}{3}\pi a^3(\rho_k - \rho)g$$

wobei  $\rho_k$  die Dichte der Kugel ist. Um diese schöne Formel herzuleiten, brauchen wir einige wesentliche Vereinfachungen. Die Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Flüssigkeiten lauten:

$$\rho D_t \mathbf{v} = \rho(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}$$

Wir setzen also eine inkompressible Flüssigkeit voraus, außerdem gehen wir vorläufig von einer Horizontalbewegung aus, so dass wir  $\mathbf{g} = 0$  setzen können.

Die Annahme

$$Re = \frac{\rho u a}{\mu} \ll 1$$

bedeutet, dass die Geschwindigkeit und der Kugelradius gering, die Zähigkeit dagegen groß ist. Die kinematische Viskosität  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  hat bei 15°C folgende typische Werte:

Flüssigkeit	$\nu [\nu] = \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$
Wasser	$10^{-2}$
Luft	0.15
Olivenöl	1
Glyzerin	18
Zuckerrübensirup	1200
Zuckerrübensirup bei 27°C	200

Sei wieder  $L$  eine typische Längeneinheit, so dass

$$\partial_1 v_1 \approx u/L \Rightarrow \partial_1^2 v_1 \approx u/L^2$$

da  $\partial_1 v_1$  sich über  $L$  wie  $u/L$  ändert. Damit erhalten wir die Abschätzung:

$$\text{Trägheit : } \|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}\| = \mathcal{O}(u^2/L)$$

$$\text{Viskosität : } \|\nu \Delta \mathbf{v}\| = \mathcal{O}(\nu u/L^2)$$

Das Verhältnis von Trägheitsterm und Viskositätsterm ist somit:

$$\frac{\|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}\|}{\|\nu \Delta \mathbf{v}\|} = \underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{Lu}{\nu}\right)}_{Re}$$

Da  $Re \ll 1$  sein soll, nehmen wir mit Stokes an:

$$D_t \mathbf{v} = \underbrace{\partial_t \mathbf{v}}_{=0, \text{ stationär}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}$$

Aufgrund der obigen Größenordnungsbetrachtung können wir auch  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0$  setzen und erhalten ein *lineares* Problem:

$$\mu \Delta \mathbf{v} = \nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}|_{\partial \mathbb{B}} = 0 \quad (4.1)$$

wobei  $\partial \mathbb{B}$  die Kugeloberfläche  $\subseteq \mathbb{R}^3$  ist. Den Kreis  $\subseteq \mathbb{R}^2$  behandeln wir später; eine Membran-Oberfläche ist 2D.

### Satz 20 (Zeitumkehr)

Sei  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  eine Lösung der Gleichung (4.1) mit der Randbedingung  $\mathbf{v}|_{\partial \mathbb{B}} = f$  für eine vorgegebene Funktion  $f$ . Was ist die Lösung des Problems (4.1), falls  $\mathbf{v}|_{\partial \mathbb{B}} = -f$  ist? Die Antwort ist  $-\mathbf{v}(\mathbf{x})$ . Dies ist eine Lösung, falls  $p' := C - p$  und wir wissen mittlerweile auch, dass sie die einzige sein muss.

Kehren wir zu unserem Problem zurück. Wir können die Kugel auch am Ursprung festhalten und als Randbedingung die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Unendlichen auf  $\mathbf{u}$  setzen. Wir haben dann nach wie vor  $\mathbf{v}|_{\partial \mathbb{B}} = 0$ , aber auch  $\mathbf{v}|_{\infty} = \mathbf{u}$ . Der obige Eindeutigkeitssatz passt schon so ungefähr, aber (noch) nicht ganz. Man nehme einen endlichen, aber großen Kasten. Wenn die Differenz  $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$  schnell genug abfällt ...

*Sommerfeld* hat es so formuliert: Wir folgern die Eindeutigkeit aus dem Axiom, dass jedes richtig gestellte Problem der mathematischen Physik nur *eine* Lösung haben kann - eine nützliche Bemerkung, bei den gleich folgenden Annahmen, die auf den ersten Blick ziemlich *ad hoc* erscheinen.

Wir folgern aus der Gleichung (4.1):

$$\Delta p = \operatorname{div}(\nabla p) = \mu \Delta(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$$

d.h.  $p$  ist eine harmonische Funktion. Die relevante Symmetrie ist eine *Rotationsinvarianz* bezüglich der  $x_3$ -Achse. Wegen der Randbedingungen wählen wir Kugelkoordinaten. Die Differentialoperatoren sind dann

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = r^{-2} \partial_r (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi v_\varphi + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (v_\theta \sin \theta)$$

sowie

$$\Delta = (r \sin \theta)^{-2} \partial_\varphi^2 + (r^2 \sin \theta)^{-1} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r$$

Den Laplaceoperator formen wir nun durch Einführung des aus der Quantenmechanik bekannten Drehimpulsoperators  $\mathbf{L}^2 := \hbar^2 \left( \partial_\theta^2 + \frac{1}{\tan \theta} \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \right)$  um:

$$\Delta = r^{-1} \partial_r^2 r - (\hbar r)^{-2} \mathbf{L}^2$$

Bei festem  $r$  können wir eine Lösung von  $\Delta p = 0$  nach Kugelflächenfunktionen  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  entwickeln, die Eigenfunktionen von  $\mathbf{L}^2$  sind. Die Kugelflächenfunktionen sind folgendermaßen definiert:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) := (-)^m \left[ \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

mit den assoziierten Legendre-Polynomen

$$P_l^m(x) := (-)^{l+m} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{-m/2} \left( \frac{d}{dx} \right)^{l-m} (1-x)^l$$

Mithilfe der Definitionen lässt sich die folgende Identität leicht zeigen:

$$Y_{l,-m} = (-)^m Y_{lm}^*$$

Wegen der Rotationsinvarianz bezüglich der  $x_3$ -Achse gibt es keine  $\varphi$ -Abhängigkeit, so dass bei jedem  $l$  nur  $m = 0$  übrig bleibt. Dann werden aus den assoziierten Legendre-Polynome die (normalen) Legendre-Polynome  $P_l$ , die reell sind:

$$P_l(x) := \frac{1}{2^l l!} \left( \frac{d}{dx} \right)^l (1-x^2)^l$$

Z.B. haben wir  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x, \dots$

Zur Lösung von  $\Delta p = 0$  mit  $\Delta = r^{-1} \partial_r^2 r - (\hbar r)^{-2} \mathbf{L}^2$  verwenden wir den Ansatz

$$p(\cos \theta, r) = \sum_{l \geq 0} \underbrace{P_l(\cos \theta)}_{=Y_{l0}(\cos \theta), \text{ bis auf eine Konstante}} f_l(r)$$

und versuchen  $f_l r = r^\alpha$ :

$$\Rightarrow \Delta(P_l f_l) = 0 \stackrel{!}{=} \alpha(\alpha+1) - l(l-1) \Rightarrow \alpha = l \vee \alpha = -(l+1)$$

Wir erhalten also die allgemeine Lösung als Superposition dieser beiden Möglichkeiten:

$$p(\cos \theta, r) = \sum_{l \geq 0} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta)$$

Für alle  $l \geq 1$  würde der linke Term divergieren, weshalb wir für alle  $l \geq 1$   $A_l = 0$  setzen. Da  $P_l(\cos \theta)$  für  $l = 0$  konstant ist, muss die Klammer .....

$$\Rightarrow p(\theta, r) = p_0 - \frac{A^2}{r} \cos \theta$$

mit  $p_0 := A_0$  und  $A := -B_1$ .

Als Motivation erwähnen wir die *erzeugende Funktion* der Legendre-Polynome.

$$(1 - 2hx + h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(x)$$

mit  $|h| < |x \pm (x^2 - 1)^{1/2}| \rightarrow$  Konvergenzradius = 1 für  $-1 \leq x \leq 1$



# Kapitel 5

## Theorie der Wirbel

Die obige Herleitung des Stokes'schen Gesetzes ist an Hässlichkeit kaum zu überbieten. Wir werden uns deshalb nun der Theorie der Wirbel widmen und uns daraus einige Vereinfachungen besorgen.

### 5.1 Der Helmholtzsche Zirkulationssatz

**Definition 21**

$\xi := \operatorname{rot} \mathbf{v}$  ist ein Vektorfeld, das mit  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  assoziiert ist.

Durch den Helmholtz'schen Fundamentalsatz (s. Kapitel 1) wissen wir, dass sich eine infinitesimale Bewegung *lokal* als Superposition von Translation, Rotation und Deformation schreiben lässt, wobei die Rotationsgeschwindigkeit  $\frac{1}{2}\xi$  ist.

**Definition 22**

Sei  $C$  eine einfache geschlossene Kurve zur Zeit  $t = 0$  und sei  $C_t := \varphi_t(C)$  ihr Bild zur Zeit  $t$ . Die *Zirkulation* ist

$$\Gamma_{C_t} := \oint_{C_t} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

**Satz 23 (Zirkulationssatz; Helmholtz 1858, Thomson=Lord Kelvin 1869)**

In einem inkompressiblen (oder isentropen) und nichtviskosen Fluss ist  $\Gamma_{C_t}$  eine Bewegungskonstante.

**Beweis:**

Zuerst beweisen wir das

**Lemma 24**

$$\frac{d}{dt} \int_{C_t} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_t} D_t \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

**Beweis:**

Sei

$$\{\mathbf{x}(s) | 0 \leq s \leq 1\}$$

eine Parametrisierung unserer Kurve. Dann parametrisiert

$$\{\varphi_t(\mathbf{x}(s)); 0 \leq s \leq 1\}$$

die Kurve  $C_t$ . Also,

$$\frac{d}{dt} \int_{C_t} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \int_0^1 \mathbf{v}(\varphi_t(\mathbf{x}(s), t), t) \underbrace{\partial_s \varphi_t(\mathbf{x}(s), t)}_{d\mathbf{s}} ds$$

Wir differenzieren unter dem Integralzeichen und wenden die Produkt- und die Kettenregel an:

$$\frac{d}{dt} \int_{C_t} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 D_t \mathbf{v}(\varphi_t(\mathbf{x}(s), t), t) \partial_s \varphi_t(\mathbf{x}(s), t) ds + \int_0^1 \mathbf{v}(\varphi_t(\mathbf{x}(s), t), t) \underbrace{\partial_t \partial_s \varphi_t(\mathbf{x}(s), t)}_{=\partial_s \partial_t} ds$$

mit  $\partial_t \varphi_t(\mathbf{x}(s), t) = \mathbf{v}$  folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{C_t} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^1 D_t \mathbf{v}(\varphi_t(\mathbf{x}(s), t), t) \partial_s \varphi_t(\mathbf{x}(s), t) ds + \int_0^1 [\partial_s \mathbf{v}(\varphi_t(\mathbf{x}(s), t), t)] \mathbf{v}(\varphi_t(\mathbf{x}(s), t)) ds = \\ &= \int_0^1 D_t \mathbf{v}(\varphi_t(\mathbf{x}(s), t), t) \partial_s \varphi_t(\mathbf{x}(s), t) ds + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 \partial_s (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\varphi_t(\mathbf{x}(s), t), t) ds}_{=0, \text{ da } C_t \text{ geschlossen}} = \\ &= \int_0^1 D_t \mathbf{v}(\varphi_t(\mathbf{x}(s), t), t) \partial_s \varphi_t(\mathbf{x}(s), t) ds = \int_{C_t} D_t \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \end{aligned}$$

□

Damit hätten wir das Lemma bewiesen, jetzt zu Navier-Stokes:

$$\rho D_t \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}$$

Wir schreiben  $\mathbf{g}$  wieder als  $\mathbf{g} = -\nabla\gamma$  und erhalten

$$D_t\mathbf{v} = -\nabla(\gamma + \rho^{-1}p) + \nu\Delta\mathbf{v}$$

Sei nun  $\nu = 0$ , dann ist  $D_t\mathbf{v} = -\nabla(\gamma + p) =: -\nabla\psi$ . Somit gilt

$$\frac{d}{dt}\Gamma_{C_t} = \frac{d}{dt} \int_{C_t} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_t} D_t\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{C_t} \nabla\psi d\mathbf{s} = \oint_{C_t} \underbrace{d\psi}_{\text{totales Differential}} = 0$$

□

Für isentrope Fluide setzen wir einfach  $\psi = \gamma + w$ .

### Korollar 25

Sei  $\Sigma$  eine beliebige (Hyper-)Fläche mit dem Rand  $C$ , dann gilt  $\Gamma_C = \int_{\Sigma} \boldsymbol{\xi} d\mathbf{A}$

**Beweis:**

$$\Gamma_C = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \stackrel{\uparrow \text{Stokes}}{=} \int_{\Sigma} \text{rot } \mathbf{v} d\mathbf{A} \stackrel{\uparrow \text{Def. } \Sigma}{=} \int_{\Sigma} \boldsymbol{\xi} d\mathbf{A}$$

□

### Definition 26

Eine Wirbellinie (Wirbelfläche) ist eine Kurve (Fläche), auf der  $\boldsymbol{\xi}$  in jedem Punkt eine Tangente (ein Element des Tangentialraums) ist. Diese Gebilde sind eindimensional (zweidimensional) im  $\mathbb{R}^3$ . Ein Analogon ist die Stromlinie.

### Satz 27

Sei  $C$  ( $S$ ) eine Wirbellinie (Wirbelfläche). Dann ist auch  $\varphi_t(C)$  bzw.  $\varphi_t(S)$  eine Wirbellinie (Wirbelfläche).

**Beweis:**

Sei  $\mathbf{n}$  ein Normalenvektor an der Stelle  $\mathbf{x} \in S$ , so dass  $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} = 0$  ist und sei  $\tilde{S}_t \subset S$  eine beliebige einfach zusammenhängende Teilmenge mit glattem Rand. Dank des Zirkulationssatzes und des Korollars 25 ist

$$\Gamma_{\partial\tilde{S}_t} = \Gamma_{\partial\tilde{S}_t} = \int_{\tilde{S}_t} \boldsymbol{\xi} d\mathbf{A} = 0$$

Da dies für alle  $\tilde{S}_t$  gilt, folgt

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\xi}|_{\tilde{S}_t} = 0$$

Man kann außerdem zeigen, dass der Durchschnitt zweier Wirbelflächen eine Wirbellinie ist, womit wir den Satz auch für Wirbellinien bewiesen haben.  $\square$

**Definition 28**

Wir definieren das Vektorfeld

$$\boldsymbol{\omega} := \rho^{-1} \boldsymbol{\xi}$$

wobei  $\boldsymbol{\xi} := \text{rot } \mathbf{v}$  die schon bekannte doppelte Rotationsgeschwindigkeit ist.

**Satz 29 (Dynamik von  $\boldsymbol{\omega}$ )**

Die Navier-Stokes-Gleichungen einer *inkompressiblen* Flüssigkeit (bzw. einer *isentropen* Flüssigkeit mit  $\nu = 0$ ) führen zur Dynamik

$$D_t \boldsymbol{\omega} = \partial_t \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}$$

**Beweis:**

Wir verwenden für den Trägheitsterm  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  die Vektor-Identität

$$\frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

in den Navier-Stokes-Gleichungen

$$D_t \mathbf{v} = \mathbf{g} - \rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} = \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

und erhalten

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \underbrace{[-\nabla \gamma - \rho^{-1} \nabla p]}_{=\nabla \psi} + \nu \Delta \mathbf{v}$$

Zur Erinnerung,  $\psi = \gamma + \rho^{-1} p$  für inkompressible und  $\psi = \gamma + w$  für isentrope Flüssigkeiten. Nun bilden wir die Rotation der obigen Gleichung und bedenken  $\boldsymbol{\xi} = \text{rot } \mathbf{v}$

$$\partial_t \boldsymbol{\xi} - \text{rot}(\mathbf{v} \times \underbrace{\text{rot } \mathbf{v}}_{=\boldsymbol{\xi}}) = \nu \Delta \boldsymbol{\xi}$$

$$\partial_t \boldsymbol{\xi} - \left[ (\boldsymbol{\xi} \nabla) \mathbf{v} - \boldsymbol{\xi} \text{div } \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi} + \mathbf{v} \underbrace{\text{div } \boldsymbol{\xi}}_{=0} \right] = \nu \Delta \boldsymbol{\xi}$$

$$D_t \boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{\xi} \nabla) \mathbf{v} + \boldsymbol{\xi} \text{div } \mathbf{v} = \nu \Delta \boldsymbol{\xi} \quad (5.1)$$

Als nächstes gehen wir von der Definition von  $\boldsymbol{\omega}$  aus

$$D_t \boldsymbol{\omega} = D_t (\rho^{-1} \boldsymbol{\xi}) = \rho^{-1} D_t \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi} D_t \rho^{-1} =$$



$$= \rho^{-1} D_t \boldsymbol{\xi} - \underbrace{\boldsymbol{\xi} \rho^{-2} D_t \rho}_{= -\rho \operatorname{div} \mathbf{v}, \text{ Kontinuitätsgleichung}} = \rho^{-1} (D_t + \operatorname{div} \mathbf{v}) \boldsymbol{\xi}$$

und formen das letzte Ergebnis mittels (5.1), also  $D_t \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi} \nabla) \mathbf{v} - \boldsymbol{\xi} \operatorname{div} \mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\xi}$  um

$$\begin{aligned} D_t \boldsymbol{\omega} &= \rho^{-1} (D_t + \operatorname{div} \mathbf{v}) \boldsymbol{\xi} = \rho^{-1} [(\boldsymbol{\xi} \nabla) \mathbf{v} - \boldsymbol{\xi} \operatorname{div} \mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi} \operatorname{div} \mathbf{v}] \\ &= \rho^{-1} [(\boldsymbol{\xi} \nabla) \mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\xi}] = \underbrace{(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}}_{\text{Def.}} + \nu \rho^{-1} \Delta \boldsymbol{\xi} \end{aligned}$$

Man darf  $\rho^{-1}$  hinter den Laplace-Operator ziehen, da aus der Inkompressibilität und der Kontinuitätsgleichung folgt, dass  $\rho$  konstant sein muss. Wenn  $\nu = 0$  ist, müssen wir uns darüber gar keine Gedanken machen. Wir haben die Divergenz von  $\mathbf{v}$  hier nicht gleich null gesetzt, da wir das Theorem ja auch für *isentrop*e Flüssigkeiten zeigen wollten, für die  $\operatorname{div} \mathbf{v} \neq 0$  sein kann. Deswegen mussten wir auch wegen des letzten Beweisschritts für die isentropen Flüssigkeiten  $\nu = 0$  voraussetzen. Damit haben wir das Theorem bewiesen.

$$D_t \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}$$

□

Wir definieren, falls  $\nu = 0$  (inkompressible oder isentrope Flüssigkeit):

$$F(\mathbf{x}, t) := \boldsymbol{\omega}(\varphi_t(\mathbf{x}), t) \quad \text{und} \quad G(\mathbf{x}, t) := \underbrace{\partial \varphi_t(\mathbf{x})}_{\text{Jacobi-Matrix, lineare Transformation}} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, 0)$$

Also ist

$$\partial_t F = \partial_t \boldsymbol{\omega}(\varphi_t(\mathbf{x}), t) \underset{\text{Kettenregel}}{=} \partial_t \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = D_t \boldsymbol{\omega} \underset{\nu=0}{=} (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (F \nabla) \mathbf{v}$$

und

$$\partial_t G(\mathbf{x}, t) = \partial(\underbrace{\partial_t \varphi_t(\mathbf{x})}_{\mathbf{v}(\varphi_t(\mathbf{x}), t)}) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, 0) \underset{\text{Kettenregel}}{=} (\partial \mathbf{v}) \underbrace{(\partial \varphi_t(\mathbf{x})) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, 0)}_{=G}$$

mit  $\partial \mathbf{v} := \partial_{\mathbf{x}(t)} \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)$ . Damit haben wir

$$\partial_t G = (\partial \mathbf{v}) G = (G \nabla) \mathbf{v}$$

$F$  und  $G$  genügen also der *gleichen* vom Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}$  vorgegebenen *linearen* Differentialgleichung erster Ordnung, deren Lösung eindeutig ist. Da  $F(\mathbf{x}, 0) = G(\mathbf{x}, 0) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, 0)$  ist, ergibt sich wegen der Eindeutigkeit das folgende Korollar.

### Korollar 30

$$\boldsymbol{\omega}(\underbrace{\mathbf{x}(t)}_{\varphi_t(\mathbf{x})}, t) = \partial \varphi_t(\mathbf{x}) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, 0), \text{ falls } \nu = 0$$

**Bemerkung:** Wir haben somit auch gesehen, wie  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  gemeint ist, nämlich,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  ist die Geschwindigkeit *an der Stelle  $\mathbf{x}$  zur Zeit  $t$*  und  $\nabla$  ist der Gradient bezüglich  $\mathbf{x}$ . Dies ist eine strikt lokale Aussage. Man vergleiche das Korollar mit der Gleichung, ebenfalls für  $\nu = 0$ :

$$\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho(\varphi_t(\mathbf{x}), t)J(\mathbf{x}, t)$$

**Aufgabe:** Verwende das obige Korollar, um zu zeigen, dass, wenn  $C$  eine Wirbellinie ist,  $C_t$  auch eine Wirbellinie ist. Eine Wirbellinie ist dadurch charakterisiert, dass  $\{\mathbf{x}(s) \mid 0 \leq s \leq 1\} \Leftrightarrow \frac{d}{ds}\mathbf{x}(s) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}(s))$  für eine *geeignete* Parametrisierung.

### Definition 31

Sei eine *geschlossene* Kurve  $C$  vorgegeben, die in jedem  $\mathbf{x} \in C$  die zugehörige Wirbellinie erzeuge. Das sich daraus ergebende Gebilde nennt sich *Wirbel-Röhre*.

**Bemerkung:** Es muss keine Röhre sein, da sie sich in  $\xi = 0$  verzweigen darf.

## 5.2 Helmholtzsches Theorem

### Satz 32 (Theorem von Helmholtz; 1858)

Sei  $\mu = 0$ . Für einen inkompressiblen oder isentropen Fluss

- (a) hängt  $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$  nicht von der Kurve  $C$  auf der Wirbel-Röhre ab; man nennt den Wert des Integrals die *Stärke* (strength) oder den „*Wirbelfluss*“ durch die Röhre“.
- (b) ist der Wirbelfluss *konstant* in der Zeit, wenn die Röhre sich mit der Flüssigkeit mitbewegt.

### Beweis:

Seien  $C_1$  und  $C_2$  zwei Kurven, die unsere Röhre umkreisen und sei  $S$  die Röhrenfläche zwischen  $C_1$  und  $C_2 \Rightarrow S$  ist eine Wirbelfläche; die  $C_i$  spannen die Flächen  $S_i$  auf. Dann gilt für das geschlossene Volumen  $V$  mit Rand  $\underbrace{S \cup S_1 \cup S_2}_{\Sigma}$

$$0 = \int_V \underbrace{\text{div} \boldsymbol{\xi}}_{\text{div rot } \mathbf{v}} d^3x = \int_{\text{Gauß } \Sigma} \boldsymbol{\xi} d\mathbf{A} = \int_{S_1 \cup S_2} \boldsymbol{\xi} d\mathbf{A} + \int_S \underbrace{\boldsymbol{\xi} d\mathbf{A}}_{=0, \text{ wg. Wirbelfläche}}$$

und nun mit Stokes

$$\int_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_1} \boldsymbol{\xi} d\mathbf{A} = - \int_{S_2} \boldsymbol{\xi} d\mathbf{A} = \int_{C_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

(b) wurde schon weiter oben bewiesen  $\square$

Wie oben schon erwähnt kann es bei  $\xi = 0$  *Verzweigungen* geben, so dass folgendes passieren kann:

$$\int_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$



# Kapitel 6

## Zweidimensionale Flüssigkeiten

### 6.1 Allgemeines

In 2D ist  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)$  und  $\boldsymbol{\xi} = (0, 0, \xi)$ . Der Zirkulationssatz besagt, dass für ein *sich mitbewegendes*  $\Sigma_t$

$$\int_{\Sigma_t} \boldsymbol{\xi} d\mathbf{A} = \int_{\Sigma_t} \xi dA = \text{const}$$

$\uparrow$   
 $\mathbf{n}=(0,0,1)$

nicht von der Zeit  $t$  abhängt und das oben hergeleitete Korollar zur Dynamik  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}(t), t) = \partial\varphi_t(\mathbf{x})\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, 0)$  lautet jetzt

$$\frac{\xi}{\rho}(\mathbf{x}(t), t) = \frac{\xi}{\rho}(\mathbf{x}, 0)$$

d.h.  $\frac{\xi}{\rho}$  ist eine Erhaltungsgröße. Das Helmholtzsche Theorem gilt nun ohne wenn und aber. Da  $\text{div}\mathbf{v} = 0$  und  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)$  nur von  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0)$ , also nicht von  $x_3$  abhängen darf, erhalten wir aus  $\mathbf{v} = \text{rot}\mathbf{A}$  mit  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x_1, x_2)$  der Intuition folgend

$$v_1 = \partial_2 A_3 - \underbrace{\partial_3 A_2}_{=0} =: \partial_2 \psi$$

$$v_2 = \underbrace{\partial_3 A_3}_{=0} - \partial_1 A_3 =: \partial_1 \psi$$

Somit haben wir uns also die Strom-Funktion (stream function)  $\psi(\mathbf{x}, t)$  konstruiert.

$$v_3 = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow A_1 = A_2 := 0$$

Die Wirbel-Bewegungsgleichung für den inkompressiblen Fall lautet

$$D_t \boldsymbol{\omega} = \partial_t \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}$$

mit  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|_{\partial\mathbb{B}}$ , ist Stromlinie  $= 0$  (isentrop) bzw.  $\mathbf{v}|_{\partial\mathbb{B}} = 0$  als Randbedingungen. Für festes  $t$  sind die Stromlinien *Höhenlinien* (level curves) von  $\psi$ . Sei nämlich  $\{(x_1(s), x_2(s))\}$  eine

Stromlinie, so dass  $x'_i := \frac{dx_i}{ds} = v_i(\mathbf{x}, t)$  für alle  $i$  ist und

$$\frac{d}{ds}\psi(x_1(s), x_2(s), t) = \sum_i (\partial_i \psi) x'_i = -v_2 v_1 + v_1 v_2 = 0$$

Der Rand  $\partial\mathbb{B}$  ist eine Stromlinie oder besteht aus Teilen von Stromlinien, die von *Stagnationspunkten*  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0$  getrennt werden. Da  $\psi$  bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, können wir im o.B.d.A. annehmen

$$\psi(\mathbf{x}, t)|_{\partial\mathbb{B}} = 0$$

und erhalten auf  $\mathbb{B}$ :

$$\rho\omega \stackrel{\uparrow}{\text{Def.}} = \xi = (\text{rot } \mathbf{v})_z = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 = -(\partial_1^2 + \partial_2^2)\psi =: -\Delta\psi$$

Somit wird der Fluss in 2D von folgenden Gleichungen bestimmt:

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2) \\ v_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix} \equiv 0 \quad \text{und} \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

Die Quellfreiheit, die ja aus der Inkompressibilität folgt, erlaubt es uns, ein  $\psi$  zu konstruieren, mit

$$\Delta\psi = -\rho\omega \quad \text{und} \quad \psi|_{\partial\mathbb{B}} = 0$$

Das fassen wir nun zusammen:

$D_t \omega = \partial_t \omega + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega = \nu \Delta \omega$	(a)
$\Delta \psi = -\rho \omega \quad \text{und} \quad \psi _{\partial\mathbb{B}} = 0$	(b)
$v_1 = \partial_2 \psi, \quad v_2 = -\partial_1 \psi$	(c)

Falls  $\omega$  vorgegeben ist, folgt  $\psi$  aus (b), und zwar eindeutig als Lösung eines Dirichlet-Problems und damit  $\mathbf{v}$  aus (c), welches man in (a) substituiert und damit  $\omega(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ , also einen Zeitschritt  $\Delta t$  später bekommt.

**Bemerkung:**

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\xi = \sum_i v_i \partial_i \xi = \partial_2 \psi \partial_1 \xi - \partial_1 \psi \partial_2 \xi = \det \begin{pmatrix} \partial_1 \xi & \partial_2 \xi \\ \partial_1 \psi & \partial_2 \psi \end{pmatrix}$$

Dies ist die Jacobi-Determinante von  $\xi$  und  $\psi$ . D.h. falls  $\nu = 0$  ist, also in einer idealen Flüssigkeit, folgt aus (a), dass der Fluss dann und nur dann *stationär* ist, wenn  $\xi$  und  $\psi$  funktionell abhängig sind. Falls  $J(\xi, \psi) = 0$  zur Zeit  $t$ , dann auch für *alle* Zeiten, dank der Stationarität.

## 6.2 Zweidimensionaler Eimer mit rotierender Flüssigkeit als Beispiel

Sei zur Zeit  $t = 0$   $\psi = \psi(r)$ , mit  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \Rightarrow$  Die Stromlinien, also die Höhenlinien sind Kreise. Außerdem

$$v_1 = \partial_2 \psi = \partial_r \psi \partial_2 r = \frac{x_2}{r} \partial_r \psi, \quad v_2 = -\partial_1 \psi = -\frac{x_1}{r} \partial_r \psi$$

Also ist  $\mathbf{v}$  eine Tangente am Kreis mit dem Radius  $r$ , wie sich das auch gehört. Für  $\partial_r \psi > 0$  liegt eine Rotation im Uhrzeigersinn vor, bzw. für  $\partial_r \psi < 0$  im Gegenuhrzeigersinn.

$$\xi = \omega \rho = -\Delta \psi = -\frac{1}{2} \partial_r (r \partial_r) \psi = \xi(r)$$

Falls  $\partial_r \psi \neq 0$  und damit Auflösen nach  $r$ , also  $r = r(\psi)$  lokal möglich ist, folgt mit obiger Gleichung

$$\xi = \xi(\psi) \Rightarrow J(\xi, \psi) \equiv 0$$

so dass eine ideale inkompressible 2D-Flüssigkeit bis in alle Ewigkeit *stationär* rotiert.

## 6.3 Übertragung auf drei Dimensionen

In 3D kann man einiges wiederholen. Da für inkompressible Flüssigkeiten  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  ist, folgt  $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$  für ein Vektorpotential  $\mathbf{A}$ . Wir verlangen analog zur aus der Elektrodynamik bekannten Coulomb-Eichung  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \Rightarrow$  z.B.  $\mathbb{B}$  ist zusammenhängend.

$$\boldsymbol{\xi} = \operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{A}}_{=0} - \Delta \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A}$$

Das Problem ist die Randbedingung für  $\mathbf{A}$ , ohne welche  $\mathbf{A}$  nicht eindeutig zu bestimmen ist. Man kann höchstens fragen: „Muss das sein?“ Wie dem auch sei

$  \begin{aligned}  D_t \omega &= \partial_t \omega + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega = \nu \Delta \omega \\  \Delta \mathbf{A} &= -\boldsymbol{\xi}, \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad \omega := \rho^{-1} \boldsymbol{\xi} \\  \mathbf{v} &= \operatorname{rot} \mathbf{A}  \end{aligned}  $
--





# Kapitel 7

## Potentialströmungen

Falls  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$  ist, gibt es keine Wirbel. Für eine ideale Flüssigkeit gilt dies sogar immer, wenn  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$  für einen Zeitpunkt gilt.

### Definition 33

Ein Bereich  $\mathbb{B}$  heißt *einfach zusammenhängend*, falls man *jede* geschlossene Kurve  $C$  zu einem Punkt zusammenschumpfen kann, *ohne*  $\mathbb{B}$  zu verlassen.

Sei nun  $\mathbb{B}$  einfach zusammenhängend und auf  $\mathbb{B}$  gelte weiter  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ , woraus folgt, dass es ein Potential  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  mit  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla\varphi(\mathbf{x}, t)$  geben muss. Daher ist

$$\Gamma_C := \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \nabla\varphi d\mathbf{s} = \oint_C d\varphi = 0 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stokes}}}{\int_{\Sigma}} \text{rot } \mathbf{v} d\mathbf{A}$$

Das gilt somit natürlich für alle (geschlossenen)  $C$ . Da bekanntlich

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla \cdot \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}$$

ist, lassen sich die Navier-Stokes-Gleichungen

$$D_t \mathbf{v} = \mathbf{g} - \rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}$$

im *isentropen* Fall umschreiben, indem wir wie oben den Trägheitsterm  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  ersetzen ( $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ ):

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{v}^2 = -\nabla w \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{v} = \nabla \varphi}}{\Rightarrow} \nabla \left( \partial_t \varphi + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + w \right) = 0$$

woraus wir folgern, dass

$$\partial_t \varphi + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + w = \text{const}$$

Die Stationarität impliziert

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + w = \text{const}$$

was erheblich mehr als das Bernoulli-Theorem  $const|_{\text{Stromlinie}}$  aussagt. You get what you pay for, da wir  $\boldsymbol{\xi} = \text{rot } \mathbf{v} = 0$  vorausgesetzt haben.

**Bemerkung:**

- Für eine inkompressible ideale Flüssigkeit müssen wir  $w$  lediglich mit  $p/\rho$  ersetzen, wobei  $\rho \equiv \rho_0$  ist.
- Sei  $\psi = \psi(r) = \ln r$  mit  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

$$\Rightarrow \mathbf{v} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{s.o.}}}{:=} \begin{pmatrix} \partial_2 \psi \\ \partial_1 \psi \end{pmatrix} = r^{-2} \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

$\oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$  hängt aber *nicht* von  $\Gamma$  in  $\mathbb{B}$  ab, da  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ . Wir können nämlich  $\Gamma$  nicht auf nichts zusammenschrumpfen lassen.

Wir betrachten nun eine *inkompressible* Potentialströmung, also

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi \quad \text{und} \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

Daraus folgt für  $\varphi$

$$\Delta \varphi = 0$$

Das Potential  $\varphi$  ist also harmonisch auf  $\mathbb{B}$ . Sei  $\mathbf{V} := \mathbf{v}|_{\partial \mathbb{B}}$  am Rande. Somit ist  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}$ . Da  $\varphi$  harmonisch ist, soll es auf  $\mathbb{B}$  das *Neumann*-Problem mit

$$\partial_n \varphi|_{\partial \mathbb{B}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} \tag{7.1}$$

lösen, also bis auf eine Konstante eindeutig sein.

Außerdem gilt im stationären Fall mit  $g = 0$

$$D_t \mathbf{v} = -\rho^{-1} \nabla p \Rightarrow (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{v}^2 = -\rho^{-1} \nabla p$$

was unmittelbar aus der Kettenregel und der Inkompressibilität folgt.

### Satz 34

Sei  $\mathbb{B}$  einfach zusammenhängend mit  $\mathbf{v}|_{\partial \mathbb{B}} = \mathbf{V}$  vorgegeben. Dann gilt:

- (i) Es gibt eine inkompressible stationäre *Potential*strömung, die

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial \mathbb{B}} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$$

$\uparrow$   
stationäre Eulergleichung

genügt, falls

$$\int_{\partial \mathbb{B}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

- (ii) Diese Strömung *minimiert* die kinetische Energie  $E_{kin} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{B}} \rho \mathbf{v}^2 d^3x$  unter allen Feldern  $\mathbf{v}'$  mit  $\text{div } \mathbf{v}' = 0$  und  $\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}|_{\partial \mathbb{B}} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$

**Beweis:**

- (i) Zuerst die Existenz: Das Neumann-Problem (7.1) hat *nur dann* eine eindeutige Lösung (bis auf eine Konstante), falls  $\int_{\partial\mathbb{B}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0$  (leicht zu zeigen mit Gauß,  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  und der Randbedingung).

Die Eindeutigkeit geht so: Seien  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{u}'$  zwei Lösungen, sowie  $\mathbf{v} := \mathbf{u} - \mathbf{u}'$  und  $\Phi := \varphi - \varphi' \Rightarrow \Delta\Phi = 0$  und  $\partial_n \Phi|_{\partial\mathbb{B}} = 0$ , außerdem ist  $\mathbf{v} = \nabla\Phi$ . Deshalb

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}} \operatorname{div}(\Phi\mathbf{v}) d^3x &= \int_{\mathbb{B}} \mathbf{v} \underbrace{\nabla\Phi}_{=\mathbf{v}} d^3x + \int_{\mathbb{B}} \Phi \underbrace{\operatorname{div}\mathbf{v}}_{=0} d^3x = \int_{\mathbb{B}} \mathbf{v}^2 d^3x = \\ &\stackrel{\uparrow \text{Gauß}}{=} \int_{\partial\mathbb{B}} \Phi\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}' \end{aligned}$$

- (ii) Lassen wir nun  $\mathbf{v}$  die Lösung von (i) sein und  $\mathbf{v}'$  den Bedingungen  $\operatorname{div}\mathbf{v}' = 0$  und  $\mathbf{v}'\mathbf{n} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$  genügen. Dann

$$\begin{aligned} E_{kin} - E'_{kin} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{B}} \rho(\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}'^2) d^3x = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{B}} \rho \|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|^2 d^3x + \\ &+ \int_{\mathbb{B}} \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}')\mathbf{v} d^3x = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{B}} \rho \|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|^2 d^3x + \int_{\mathbb{B}} \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}')\nabla\varphi d^3x \end{aligned}$$

Das Integral  $\int_{\mathbb{B}} \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}')\nabla\varphi d^3x$  ist null, da  $\operatorname{div}(\mathbf{v} - \mathbf{v}') = 0$ . Der Beweis ist absolut analog zum Beweis im obigen Abschnitt über die Vektorzerlegung:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}} \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}')\nabla\varphi d^3x &= \int_{\mathbb{B}} \rho\nabla[(\mathbf{v} - \mathbf{v}')\varphi] d^3x - \int_{\mathbb{B}} \rho\varphi \underbrace{\operatorname{div}(\mathbf{v} - \mathbf{v}')}_{=0} d^3x = \\ &\stackrel{\uparrow \text{Gauß}}{=} \int_{\partial\mathbb{B}} \rho[(\mathbf{v} - \mathbf{v}')\varphi] d\mathbf{A} = 0, \quad \text{da } \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{aligned}$$

Uns bleibt also

$$E_{kin} - E'_{kin} = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{B}} \rho \|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|^2 \leq 0$$

$E_{kin} - E'_{kin} = 0$  dann und nur dann, wenn  $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$ .

Zu guter Letzt folgt  $E_{kin} \leq E'_{kin}$  mit Gleichheit nur am Minimum.

□

### Korollar 35

Sei  $\mathbb{B}$  ein Bereich mit festem Rand. Die einzige inkompressible Potentialströmung ( $\mu = 0$ ), die es in  $\mathbb{B}$  geben kann, ist  $\mathbf{v} = 0$ .

**Bemerkung:** Für unberandete Bereiche ist dies falsch; z.B. löst  $\varphi(r, \theta) = (r+r^{-1}) \cos \theta$  das Neumann-Problem mit  $\partial_n \varphi = 0$  auf dem Einheitskreis *und* und  $x_1$ -Achse, wo  $\theta = 0$ , wie in der untenstehenden Figur gezeigt. Der Bereich ist zwar einfach zusammenhängend, aber un-

endlich ausgedehnt.

**Korollar 36**

Für eine stationäre inkompressible Strömung ohne Gravitation gilt

$$p + \frac{\rho}{2} \mathbf{v}^2 = \text{const}$$

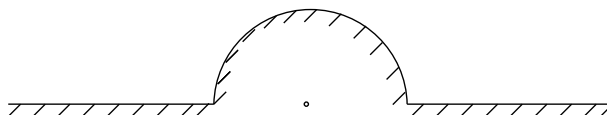


Abbildung 7.1: ??

**Beweis:**

Wie schon weiter oben schon gezeigt haben wir

$$D_t \mathbf{v} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stationär}}}{=} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{g}=0}}{=} -\rho^{-1} \nabla p$$

Daraus folgt nach Aufintegrieren die Behauptung.  $\square$

# Kapitel 8

## Komplexe Geschwindigkeitsfelder

### 8.1 Einführung

Sei  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  ein  $C^1$  Geschwindigkeitsfeld im  $\mathbb{R}^2$  mit  $v_i = v_i(x_1, x_2)$ , das eine inkompressible Flüssigkeit

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 = 0 \quad (8.1)$$

ohne Wirbel beschreibt, so dass

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 = 0 \quad (8.2)$$

gilt.

#### Definition 37 (Komplexe Geschwindigkeit)

Die *komplexe* Geschwindigkeit  $F$  ist definiert als

$$F := v_1 - iv_2 \quad (8.3)$$

#### Definition 38 (Analytische Funktion)

Eine Funktion  $f(z)$  heißt „analytisch“ (oder auch holomorph) an der Stelle  $z_0$ , falls

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert und *unabhängig* vom Weg  $z \rightarrow z_0$  ist.

Wenn wir für  $z = x_1 + ix_2$  und somit

$$f(z) = u_1(x_1, x_2) - iu_2(x_1, x_2)$$

schreiben und zwei Wege (siehe Abb. 8.1)

$$z = x_1 + ix_{20} \rightarrow z_0 = x_{10} + ix_{20}$$

sowie

$$z = x_{10} + ix_2 \rightarrow z_0 = x_{10} + ix_{20}$$

betrachten, so ergibt sich durch Einsetzen in den Differentialquotienten

$$f'(z_0) = (\partial_1 u_1 - i\partial_1 u_2)|_{(x_{10}, x_{20})} = (-\partial_2 u_2 - i\partial_2 u_1)|_{(x_{10}, x_{20})}$$

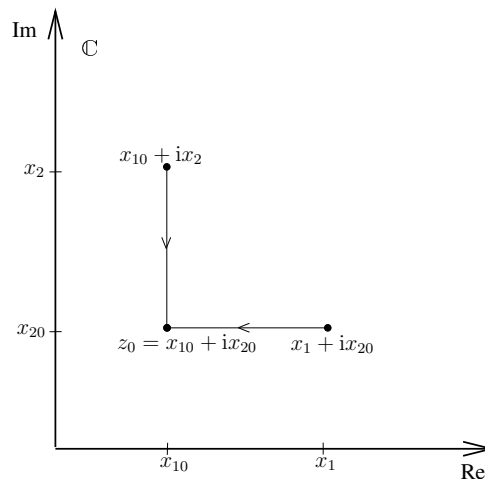


Abbildung 8.1: Zur Herleitung der Cauchy-Riemann-Gleichungen: Der Differentialquotient ist unabhängig vom Weg  $x_{10} + ix_2 \rightarrow z_0$  bzw.  $x_1 + ix_{20} \rightarrow z_0$ .

Und schon haben wir die Cauchy-Riemann-Gleichungen für die  $C^1$ -Funktionen  $u_1$  und  $u_2$  hergeleitet.

### Satz 39 (Cauchy-Riemann-Gleichungen)

Für eine analytische Funktion  $f(z) = f(x_1 + ix_2) = u_1(x_1, x_2) + iu_2(x_1, x_2)$  mit dem Realteil  $\operatorname{Re}(f(z)) = u_1$  und dem Imaginärteil  $\operatorname{Im}(f(z)) = u_2$  gilt

$$\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 = 0 \quad \text{und} \quad \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 = 0.$$

Die Cauchy-Riemann-Gleichungen sind die notwendige (klar) *und* die hinreichende Bedingung für die Analytizität von  $f$ .

Umgekehrt, gegeben sei eine *analytische* Funktion  $F$ . Deren Real- und Imaginärteil, nämlich

$$v_1 := \operatorname{Re}(F) \quad \text{und} \quad v_2 := -\operatorname{Im}(F),$$

definieren im Hinblick auf (8.1) und (8.2) einen *inkompressiblen*, stationären und wirbelfreien Potentialfluss  $\mathbf{v}$ .

Falls es ein  $W$  gibt, dessen Ableitung das Geschwindigkeitsfeld  $F = dW/dz$  ist, so nennt man aufgrund von Satz 39 und den Gleichungen (8.1), (8.2) und (8.3)  $W$  das zugehörige *komplexe Potential* und schreibt  $W := \varphi + i\psi$ . Daraus folgt mit (8.3)

$$v_1 = \partial_1 \varphi = \partial_2 \psi \quad \text{und} \quad v_2 = -\partial_1 \psi = \partial_2 \varphi$$

Damit ist  $\varphi$  das Geschwindigkeitspotential mit  $\mathbf{v} = \nabla\varphi$  und  $\psi$  die *Strom-Funktion* (stream function) mit  $\psi|_{\partial\mathbb{B}} = \text{const.}$  Falls das komplexe Potential  $W$  stetig differenzierbar ist, so ist es auch analytisch.

Betrachten wir nun einen umströmten Körper  $\mathbb{B}^c$  (siehe Abb. 8.3) und das dazugehörige Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}$  in  $\mathbb{B}$ . Wie wir schon bei der Herleitung der Euler-Gleichung gesehen haben, ist das Integral

$$\mathcal{F} = - \int_{\partial\mathbb{B}} p \mathbf{n} ds \quad (8.4)$$

die Kraft auf den Körper mit dem Rand  $\partial\mathbb{B}$  im idealen Fluss. Das Wegelement  $-\mathbf{n}ds$  kann in komplexen Variablen wegen der Beziehung

$$-idz = dy - idx \perp \partial\mathbb{B}$$

auch als  $idz$  geschrieben werden (siehe Abb. 8.2):

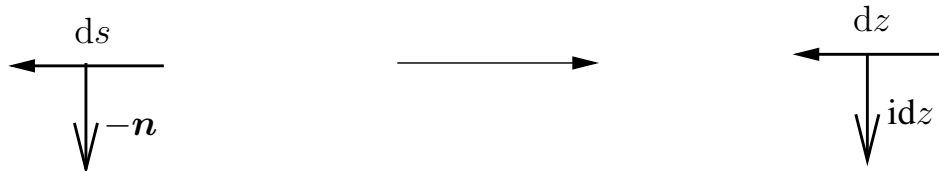


Abbildung 8.2: Zur Veranschaulichung von  $-\mathbf{n}ds = idz$ , wobei  $\partial\mathbb{B}$  im *positiven* Sinn durchlaufen wird.

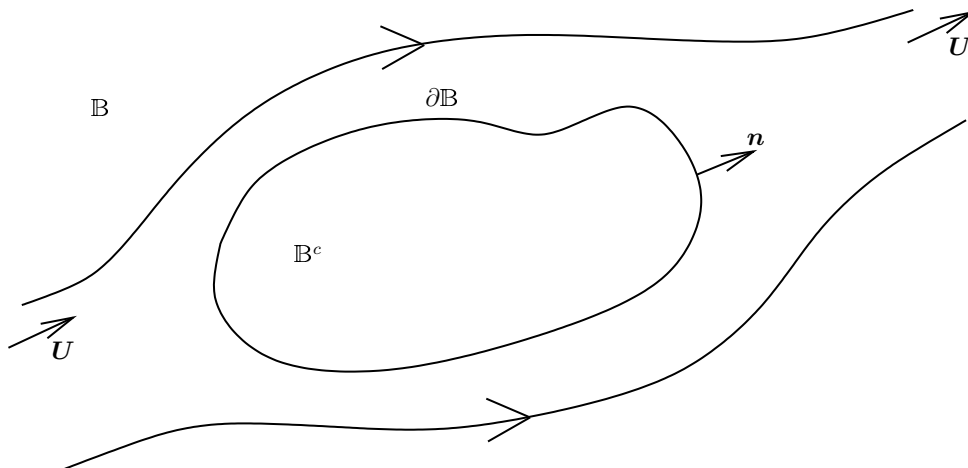


Abbildung 8.3: Ein umströmter Körper, der durch  $\mathbb{B}$  dargestellt wird. Die Strömungsgeschwindigkeit nimmt im Unendlichen den konstanten Wert  $\mathbf{U}$  an.

## 8.2 Das Lemma von Blasius

### Lemma 40 (Lemma von Blasius 1910)

Die Kraft auf einen Körper mit festem Rand  $\partial\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  in einer stationären, inkompressiblen, rotationsfreien und idealen ( $\mu = 0$ ) Flüssigkeit mit komplexer Geschwindigkeit  $F$  wird von

$$\mathcal{F} = -\frac{i\rho}{2} \left( \int_{\partial\mathbb{B}} F^2(z) dz \right)^* \in \mathbb{C}$$

gegeben, wobei der Stern eine komplexe Konjugation bedeutet.

#### Beweis:

Laut Definition von  $\mathcal{F}$  haben wir

$$\mathcal{F} = - \int_{\partial\mathbb{B}} p \mathbf{n} ds = i \oint_{\partial\mathbb{B}} p dz$$

Damit ergibt sich sofort mit  $p = p_0 - \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2$ , vgl. Satz 13, wie es für den stationären Zustand gilt:

$$\mathcal{F} = -\frac{i\rho}{2} \oint_{\partial\mathbb{B}} (v_1^2 + v_2^2) dz - i \underbrace{\oint_{\partial\mathbb{B}} p_0 dz}_{=0} \quad (8.5)$$

Nach der Definition von  $F$  ist

$$F^2 = (v_1 - iv_2)^2 = v_1^2 - v_2^2 - 2iv_1v_2$$

und in einer *idealen* Strömung gilt *am Rand*  $\partial\mathbb{B}$  wegen

$$\mathbf{v} \parallel \partial\mathbb{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0,$$

so dass für ideale Strömungen gilt:

$$v_1 dy = v_2 dx \quad (8.6)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} F^2 dz &= (v_1^2 - v_2^2 - 2iv_1v_2) (dx + idy) = (v_1^2 - v_2^2) dx + i(v_1^2 - v_2^2) dy \underbrace{-2iv_1v_2 dx}_{=-2iv_1^2 dy} + \underbrace{2v_1v_2 dy}_{=2v_2^2 dx} = \\ &= (v_1^2 + v_2^2) dx - i(v_1^2 + v_2^2) dy = \underbrace{(v_1^2 - v_2^2)}_{\text{reell}} \underbrace{dz^*}_{dx - idy} \\ &\Rightarrow (F^2 dz)^* = (v_1^2 + v_2^2) dz \end{aligned} \quad (8.7)$$

Und die Kombination von (8.5) und (8.7) liefert das Lemma von Blasius.  $\square$



### 8.3 Das Kutta-Joukowski-Theorem

#### Satz 41 (Kutta-Joukowski-Theorem 1902/06)

Ein Objekt mit festem Rand  $\partial\mathbb{B} \subseteq \mathbb{R}^2$  in einer *stationären* inkompressiblen Potential-Strömung, die im Unendlichen die Geschwindigkeit  $\mathbf{U}$  hat, empfindet die Kraft:

$$\mathcal{F} = -\rho\Gamma_C\mathbf{U}\mathbf{n}$$

mit  $\mathbf{n} \perp \mathbf{U}$  und der Zirkulation  $\Gamma_C$  um  $\partial\mathbb{B}$ .

#### Beweis:

Die komplexe Geschwindigkeit  $F = v_1 - iv_2$  ist analytisch auf  $\mathbb{B}$  und kann da in eine Laurent-Reihe entwickelt werden,

$$F(z) = a_0 + \sum_{n \leq -1} a_n z^n$$

da im Hinblick auf

$$F(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} F_\infty = U_1 - iU_2 =: a_0$$

die positiven Potenzen  $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$  verschwinden.

Wegen der Analytizität bietet es sich des Weiteren an, das Geschwindigkeitsfeld  $F(z)$  über die geschlossene Kurve  $C := \partial\mathbb{B}$  zu integrieren:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\mathbb{B}} F(z) dz &= \oint_{\partial\mathbb{B}} (v_1 - iv_2)(dx + idy) = \\ &= \oint_{\partial\mathbb{B}} \underbrace{(v_1 dx + v_2 dy)}_{\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}} + i \oint_{\partial\mathbb{B}} \underbrace{(v_1 dy - v_2 dx)}_{=0, (8.6)} \stackrel{\uparrow}{\text{Def.}} = \Gamma_C. \end{aligned}$$

Außerdem gilt dank Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathbb{B}} F(z) dz = a_1$$

und damit

$$\Rightarrow a_1 = \Gamma_C / 2\pi i. \quad (8.8)$$

Wir schreiben die ersten Terme von der Laurent-Reihe von  $F^2(z)$  hin:

$$F^2(z) = a_0^2 + \frac{2a_0 a_1}{z} + \frac{a_0 a_2 + a_1^2}{z^2} + \dots$$

so dass dank des Lemmas von Blasius und dem Integralsatz von Cauchy (unser neues  $a_1$  ist jetzt natürlich  $2a_0 a_1$ )

$$\mathcal{F} = -\frac{i\rho}{2} \left( \oint_{\partial\mathbb{B}} F^2(z) dz \right)^* = -\frac{i\rho}{2} (2\pi i \cdot 2a_0 a_1)^* = -i\rho\Gamma_C(U_1 + iU_2) = -i\rho\Gamma_C\mathbf{U}$$

ist. Wenn wir von der komplexen Darstellung wieder in den  $\mathbb{R}^2$  wechseln, sieht die Kraft folgendermaßen aus:

$$\mathcal{F} = -\rho\Gamma_C \begin{pmatrix} -U_2 \\ U_1 \end{pmatrix}$$

und damit senkrecht zu  $\mathbf{U}$ , wie behauptet.  $\square$

**Bemerkung:**

- Es gibt in einer *idealen* Flüssigkeit *keine* Widerstandskraft (parallel zu  $\mathbf{u}$ ), entgegen der Praxis.
- Falls  $\mathbb{B}^c$  eine Symmetrie-Achse  $\hat{\mathbf{e}}$  hat und  $\mathbf{U} \parallel \hat{\mathbf{e}}$ , so ist wegen der Symmetrie  $\Gamma_C = 0$  und es wirkt *überhaupt* keine Kraft. Dies ist das d'Alembertsche Paradoxon in zwei Dimensionen.
- **Wirbel an Flügelenden (trailing vortices):** Laut Kutta-Joukowski *muss* es eine Zirkulation  $\Gamma_C \neq 0$  geben, damit es überhaupt eine Auftriebskraft (lift) gibt.

$$0 \neq \Gamma_C = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{Stokes } \Sigma} \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$$

Also muss  $\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$  sein, wir haben sozusagen z.B. bei einem Flugzeug einen Wirbelfluss durch die das Flügelende umschließende Fläche  $\Sigma$ . Das sieht in der Praxis wie ein konzentrierter Wirbel am Flügelende aus.

- **Wichtige Frage:** Wieso haben die obigen Betrachtungen wie Kutta-Joukowski denn überhaupt Relevanz, wenn es Viskosität gibt? Die Viskosität  $\mu$  mag zwar niedrig sein; in *Grenzschichten* ist der Geschwindigkeitsgradient im Großen und Ganzen groß, so dass sich  $\mu \partial \cdot v$  auch beachtlich auswirkt. Intuitiv:  $\mu$  „klein“, also ist  $Re$  groß. Deshalb ist der Übergang wie angegeben und die Sache hat sich damit. Falsch! Die Grenzschicht kann sich von der Oberfläche *trennen* (Prandtl 1904). In Abb.8.4 hat der Druck ein Maximum  $p_A = p_C$  in den Stagnationspunkten  $A$  und  $C$  und ein Minimum dazwischen (in  $B$ ). Also reißt sich die Flüssigkeit zwischen  $B$  und  $C$  los. Wenn  $\mu$  groß genug ist (und  $Re$  klein), gibt es *keine* Trennung, sondern eine Grenzschicht und die Lage wird außerhalb von der *nichtviskosen* Theorie ziemlich gut beschrieben.

Wir werden später zeigen, dass für einen unendlich langen *symmetrischen* Flügel, der einen Winkel  $\alpha$  mit der horizontalen Ebene einschließt

$$\Gamma_C = -4\pi UL \sin \alpha$$

gilt. Dazu sind die Funktionentheorie und die Prandtl'sche Grenzschichttheorie, die das Ganze auf Euler reduziert, ganz nützlich.

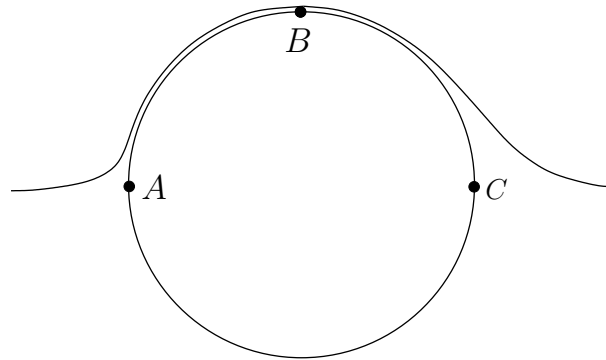


Abbildung 8.4: Losreißen der Grenzschicht: Zwischen dem Punkt  $B$ , wo der geringste Druck herrscht und dem Stagnationspunkt  $C$  reißt die Grenzschicht sich los.

## 8.4 Beispiele

- Konstante Geschwindigkeit  $\alpha := U_1 - iU_2$  mit Potential  $W(z) := \alpha z$  und damit

$$F(z) = W'(z) = \alpha = v_1 - iv_2$$

so dass die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \mathbf{U} = \text{const}$$

ist.

- Sei  $\mathbb{B}^c$  eine Kreisscheibe mit Radius  $a$  und Mittelpunkt  $(0,0)$  und sei  $U > 0$  (siehe Abb. 8.5):

$$W(z) := U \left( z + \frac{a^2}{z} \right) \underset{\text{Def.}}{=} \varphi + i\psi$$

$$\Rightarrow F(z) = W'(z) = U \left( 1 - \frac{a^2}{z^2} \right) \underset{|z| \rightarrow \infty}{\longrightarrow} U$$

Wir müssen noch prüfen, ob unser Potential überhaupt die Randbedingungen auf  $\partial\mathbb{B} = \{|z| = a\}$  erfüllt. Das heißt, dass die sich aus der komplexen Geschwindigkeit  $F$  ergebende Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  parallel zum Rand sein muss. Dazu reicht es zu zeigen, dass  $\psi|_{\partial\mathbb{B}} = \text{const}$ , äquivalent dazu, dass  $\partial\mathbb{B}$  eine Stromlinie ist. Also, sei  $z \in \partial\mathbb{B}$

$$\Rightarrow z = ae^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad F(z) = U \left( 1 - e^{-2i\theta} \right) \underset{\text{Def.}}{=} v_1 - iv_2$$

während

$$W(z) = \underbrace{Ua(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}_{U(z+z^*) \in \mathbb{R}} = 2Ua \cos \theta \in \mathbb{R}$$

so dass der Imaginärteil von  $W$ , nämlich  $\psi$ , null am Rand  $\psi|_{\partial\mathbb{B}} = 0$  ist. Außerdem

$$v_1 = U(1 - \cos 2\theta), \quad v_2 = U \sin 2\theta$$

und folglich sind  $A$  und  $C$  *Stagnationspunkte* mit

$$\underbrace{\mathbf{v}(\theta = 0)}_C = \underbrace{\mathbf{v}(\theta = \pi)}_A = 0.$$

da

$$U^{-2}\mathbf{v}^2 = (1 - \cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta = 2 - 2 \cos 2\theta = 4 \sin^2 \theta$$

Dieser Ausdruck verschwindet für  $\theta = 0$  sowie  $\theta = \pi$  und ist maximal für  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ , also in  $B$  und  $D$  (vgl. Abb. 8.5). Da  $p = p_0 - \frac{\rho}{2}\mathbf{v}^2$  ist, ist der Druck maximal in  $A$  und  $C$  und minimal in  $B$  und  $D$ , während  $\Gamma_{\partial\mathbb{B}} = 0$ , da  $W$  eindeutig auf  $\partial\mathbb{B}$  (und analytisch in offener Umgebung) ist und  $F = W'$  gilt, woraus folgt

$$\Gamma_{\partial\mathbb{B}} = \oint_{\partial\mathbb{B}} F(z)dz = \oint_{\partial\mathbb{B}} W'(z)dz = 0.$$

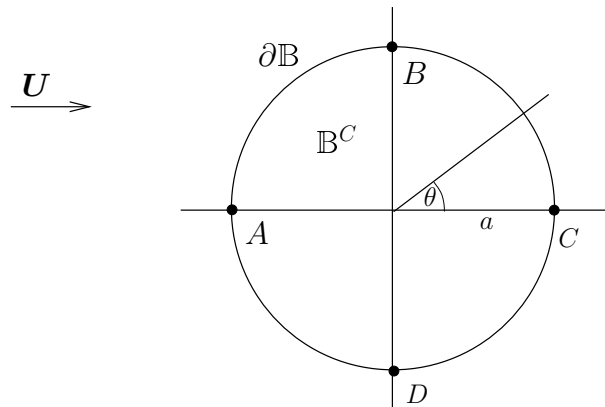


Abbildung 8.5: Strömung um eine Kreisscheibe: Im Unendlichen sei die Strömung  $U$ . Die Stagnationspunkte liegen bei  $A$  und  $C$ .

Wir hatten schon  $\psi'(r) \neq 0$  als Beispiel einer inkompressiblen Strömung betrachtet, wo  $\Delta\psi = -\xi$  die Wirbelstärke  $\xi$  liefert. Falls  $\psi = \text{Im}(W)$  und  $W$  analytisch, so ist der Fluss auch wirbelfrei, wie z.B.

$$W(z) := \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z = \frac{\Gamma}{2\pi i} (\ln |z| + i \arg z)$$

Bedauerlicherweise ist  $W$  *nicht* eindeutig, aber die komplexe Geschwindigkeit

$$F(z) = W'(z) = \frac{\Gamma}{2\pi iz} \quad \Rightarrow \quad \oint_C F(z)dz = \Gamma$$

ist analytisch in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} F(z) = 0$ , d.h. die Geschwindigkeit im Unendlichen ist null. Außerdem sind alle Kreise  $\{|z| = r > 0\}$  Stromlinien, da

$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} (\arg z - i \ln |z|) \underset{\text{Def.}}{=} \varphi + i\psi \quad \Rightarrow \quad \psi(z) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln |z|$$

und damit  $\psi|_{|z|=r} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$  auf dem Kreis konstant ist.

**Bemerkung:**

$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0)$$

tut das Gleiche um  $z_0$  *verschoben*, auf Englisch nennt sich dies „potential vortex at  $z_0$ “. □

Eine Kombination des zweiten und des dritten Beispiels liefert

$$W(z) = U \left( z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$$

Auf dem Bereich  $\mathbb{B} = \{|z| > a\}$  ist  $\psi|_{\partial\mathbb{B}} = \text{const}$  und für  $a = 1$  ist  $\psi|_{\partial\mathbb{B}} = 0$ . Damit ergibt sich eine *inkompressible stationäre Potentialströmung* in  $\mathbb{B}$  mit der asymptotischen Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(\infty) = (U, 0)$ , so dass wir Kutta-Joukowski anwenden können. Dazu gehen wir in Polarkoordinaten  $(r, \theta)$  über und mit der wohlbekannten Darstellung komplexer Zahlen in Polarkoordinaten  $z = r e^{i\theta}$  können wir das Potential  $W$  so schreiben:

$$W(z) = U \left( r e^{i\theta} + \frac{a^2}{r} e^{-i\theta} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} (\theta - i \ln r)$$

Also haben wir für den Realteil von  $W$

$$\varphi(r, \theta) = \text{Re}W = U \cos \theta \left( r + \frac{a^2}{r} \right) + \frac{\Gamma\theta}{2\pi}$$

Damit können wir  $F(z) = v_1 - iv_2 = W'(z) = U \left( 1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi iz}$  folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} F(z) &= U \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} (\cos 2\theta - i \sin 2\theta) \right] + \frac{\Gamma}{2\pi ir} (\cos \theta - i \sin \theta) = \\ &= \left[ U - \frac{Ua^2}{r^2} \cos 2\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \sin \theta \right] + i \left[ U \frac{a^2}{r^2} \sin 2\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \cos \theta \right] \end{aligned}$$

Wenn wir den Kreis  $\{|z| = r = a\}$  einsetzen und  $v_1$  sowie  $v_2$  gleich null setzen, erhalten wir die Stagnationspunkte:

$$v_1 = U(1 - \cos 2\theta) - \frac{\Gamma}{2\pi a} \sin \theta \stackrel{!}{=} 0, \quad v_2 = -U \sin 2\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \cos \theta \stackrel{!}{=} 0$$

Wir lösen die Gleichungen, zuerst für  $v_1$

$$2U \sin^2 \theta = \frac{\Gamma}{2\pi a} \sin \theta$$

$$\Rightarrow \sin \theta = 0 \quad \text{oder} \quad \sin \theta = \frac{\Gamma}{4\pi a U}$$

nun für  $v_2$

$$2U \sin \theta \cos \theta = \frac{\Gamma}{2\pi a} \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = 0 \quad \text{oder} \quad \sin \theta = \frac{\Gamma}{4\pi a U}$$

so dass wir für  $\left| \frac{\Gamma}{4\pi a U} \right| \leq 1$  zwei Stagnationspunkte mit  $\theta_0 = \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi a U}$  und  $\pi - \theta_0$  haben, sonst keine.

**Bemerkung:** Eine 3-dimensionale Sphäre in einer idealen Flüssigkeit, die asymptotisch (also auf  $\infty$ ) die Geschwindigkeit  $\mathbf{U}$  hat, hat das Potential (mit Normalenvektor  $\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ )

$$\varphi(\mathbf{x}) = \left( \mathbf{x} + \frac{a^3}{2r^2} \mathbf{n} \right) \mathbf{U}$$

so dass

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{U} + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{r} \right)^3 [3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{U}]$$

und wie man zeigen kann, ist in drei Dimensionen  $\mathcal{F} = 0$ .

## 8.5 Abschließende Bemerkungen und Beispiele

### 8.5.1 Rankine Wirbel

Wir befinden uns in Zylinderkoordinaten. Seien

$$v_\theta(r) = \begin{cases} \Omega r & \text{für } r < a \\ \Omega a^2/r & \text{für } r > a \end{cases}$$

und

$$v_r = v_z \equiv 0$$

mit  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , so dass

$$\boldsymbol{\xi} = \text{rot } \mathbf{v} = \begin{cases} 2\Omega \mathbf{e}_z & \text{für } r < a \\ 0 & \text{für } r > a \end{cases}$$

In den folgenden Abbildungen sind das Geschwindigkeitsfeld und die Wirbelstärke zu sehen.

Die Zirkulation ist

$$\Gamma_C = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{r \downarrow a}^{2\pi} \Omega \frac{a^2}{r} (r d\theta) = 2\pi \Omega a^2$$

Außerdem ist

$$p(r=0) = p(r=\infty) - p(\Omega a)^2$$

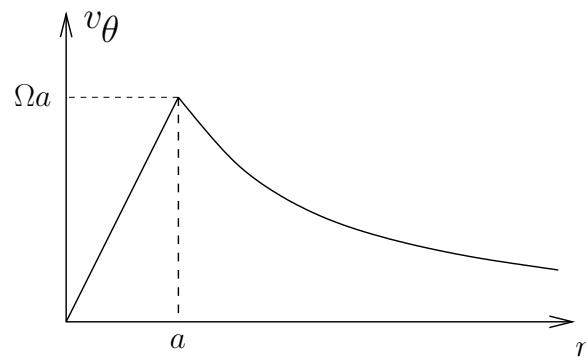


Abbildung 8.6: ??

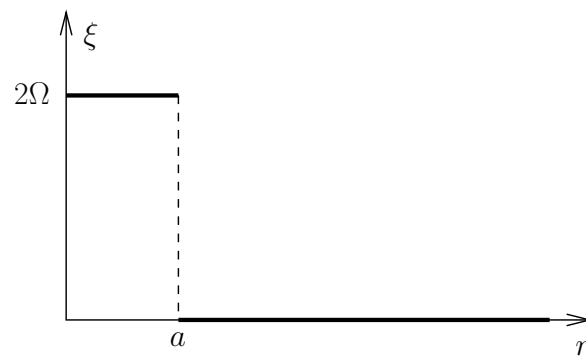


Abbildung 8.7: ??

Bekanntlich ist im Zentrum eines Tornados der Druck sehr viel *geringer*. Für  $r > a$ , wo ja  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$  ist, gibt es ein  $\varphi$  mit  $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ . Wir schreiben den Gradienten in Zylinderkoordinaten aus.

$$\nabla\varphi = \underbrace{\partial_r\varphi}_{=0} \mathbf{e}_r + r^{-1}\partial_\theta\varphi\mathbf{e}_\theta + \underbrace{\partial_z\varphi}_{=0} \mathbf{e}_z = \mathbf{v}$$

Weil lokal  $\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta + v_z\mathbf{e}_z$  gilt, mit  $v_\theta = \Omega a^2/r$  für  $r > a$ , und  $\Gamma_C = 2\pi\Omega a^2$  ist, schreiben wir

$$\partial_\theta\varphi = \Gamma_C/2\pi \quad \Rightarrow \quad \varphi(\theta) = \frac{\Gamma_C}{2\pi}\theta$$

Bekanntlich ist auch  $v_1 = \partial_2\psi$  und  $v_2 = -\partial_1\psi$ , so dass wir  $\psi$  ebenfalls bestimmen können

$$\text{div}\mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \text{rot}(\psi\mathbf{e}_z)$$

was sich mittels

$$\text{rot } \mathbf{v} = r^{-1} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_z \\ v_r & rv_\theta & v_z \end{vmatrix}$$

auch so schreiben lässt

$$\psi = \psi(r, \theta) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = r^{-1} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_z \\ 0 & 0 & \psi \end{vmatrix}$$

Also ist

$$v_r = r^{-1}\partial_\theta\psi = 0$$

und

$$v_\theta = -r^{-1}(r\partial_r\psi) = \frac{\Gamma_C}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad \psi(r, \theta) = -\frac{\Gamma_C}{2\pi} \ln r$$

so dass wir für das komplexe Potential

$$W(z) = \varphi + i\psi = \frac{\Gamma_C}{2\pi}(\theta - i \ln r) = \frac{\Gamma_C}{2\pi i}(\ln |z| + i \arg z) = \frac{\Gamma_C}{2\pi i} \ln z$$

erhalten, einen alten Bekannten also.

## 8.5.2 Die Stokes'sche Widerstandsformel in neuem Lichte

Wir beginnen wieder mit den Navier-Stokes-Gleichungen:

$$D_t\mathbf{v} = \underbrace{\partial_t\mathbf{v}}_{=0, \text{ stationär}} + \underbrace{(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}}_{\text{vernachlässigt}} = \mathbf{g} - \rho^{-1}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v}$$



Den Trägheitsterm  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  kann man für kleine Reynolds-Zahlen (also für große Viskositäten  $\nu \gg 1$ ) vernachlässigen (s.o.). Wie im Kapitel über die Stokes'sche Widerstandsformel haben wir mit  $\mathbf{g} = 0$  wieder die Gleichungen

$$\mu \Delta \mathbf{v} = \nabla p \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \mathbf{v}|_{\partial B} = 0 \quad (8.9)$$

Gesucht ist ein Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}(r, \theta)$ , welches rotationssymmetrisch bezüglich der  $z$ -Achse ist. In sphärischen Koordinaten  $(r, \theta, \varphi)$  gilt:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = r^{-2} \partial_r (r^2 v_r) + (r \sin \theta)^{-1} \partial_\theta (v_\theta \sin \theta) + (r \sin \theta)^{-1} \partial_\varphi v_\varphi$$

und

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r \mathbf{e}_\theta & (r \sin \theta) \mathbf{e}_\varphi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ v_r & r v_\theta & (r \sin \theta) v_\varphi \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} (\partial_\theta (v_\varphi \sin \theta) - \partial_\varphi v_\theta) \\ \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi v_r - \partial_r (r v_\varphi) \right) \\ \frac{1}{r} (\partial_r (r v_\theta) - \partial_\theta v_r) \end{pmatrix}$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie ist  $v_\varphi = 0$ . Mittels einer *Stromfunktion*  $\psi(r, \theta)$  können wir  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  befriedigen

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta \psi \quad \text{und} \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \partial_r \psi \quad (8.10)$$

und damit

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{r \sin \theta} \tilde{\Delta} \psi \end{pmatrix}$$

mit

$$\tilde{\Delta} := \partial_r^2 + \frac{\sin \theta}{r^2} \partial_\theta \left( \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \right)$$

Wir schreiben nun (8.9) in der Form

$$\nabla p = -\mu \underbrace{\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}}_{\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}} \quad (8.11)$$

beachten

$$\nabla p = \partial_r p \mathbf{e}_r + r^{-1} \partial_\theta p \mathbf{e}_\theta + (r \sin \theta)^{-1} \partial_\varphi p \mathbf{e}_\varphi$$

und setzen in (8.11) die Rotation von

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = -\frac{1}{r \sin \theta} \tilde{\Delta} \psi \mathbf{e}_\varphi$$

ein und bekommen

$$\partial_r p = \mu \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta \tilde{\Delta} \psi$$

sowie

$$\partial_\theta p = -\mu \partial_r \frac{1}{\sin \theta} \tilde{\Delta} \psi \quad (8.12)$$

Nun leiten wir  $\partial_\theta p$  nach  $r$  und  $\partial_r p$  nach  $\theta$  ab:

$$\begin{aligned}\partial_\theta \partial_r p &= \frac{\mu}{r^2} \left[ \left( \partial_\theta \frac{1}{\sin \theta} \right) \partial_\theta + \partial_\theta^2 \right] \tilde{\Delta} \psi \\ \partial_r \partial_\theta p &= -\frac{\mu}{\sin \theta} \partial_r^2 \tilde{\Delta} \psi\end{aligned}$$

Da die partiellen Ableitungen vertauschen, ist die Differenz null und wir erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\mu}{r^2} \left[ \left( \partial_\theta \frac{1}{\sin \theta} \right) \partial_\theta + \partial_\theta^2 \right] \tilde{\Delta} \psi + \frac{\mu}{\sin \theta} \partial_r^2 \tilde{\Delta} \psi &= 0 \\ \Rightarrow \left[ \partial_r^2 + \frac{\sin \theta}{r^2} \partial_\theta \left( \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \right) \right] \tilde{\Delta} \psi &= 0 \\ \Rightarrow \tilde{\Delta}^2 \psi &= 0\end{aligned}$$

mit den Randbedingungen (8.9) und wegen (8.11)

$$\partial_r \psi|_{r=a} = \partial_\theta \psi|_{r=a} = 0 \quad (8.13)$$

für  $r = a$  sowie für  $r \rightarrow \infty$

$$v_r = U \cos \theta \quad \text{und} \quad v_\theta = -U \sin \theta$$

Da  $\mathbf{v}$  durch (8.10) gegeben wird, muss wohl für  $r \rightarrow \infty$

$$\frac{\psi(r, \theta)}{r^2} = \frac{1}{2} U \sin^2 \theta$$

gelten. Im Endlichen probieren wir als Ansatz für  $\psi$  deshalb

$$\psi(r, \theta) = f(r) \sin^2 \theta$$

was sich mit  $\tilde{\Delta}^2 \psi = 0$  zu

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right)^2 f(r) = 0$$

reduziert, einer Gleichung, die *linear* in  $f$  ist. Der Ansatz  $f(r) = r^\alpha$  liefert

$$[(\alpha - 2)(\alpha - 3) - 2][\alpha(\alpha - 1) - 2] = 0$$

Diese Gleichung hat vier Lösungen, nämlich  $-1, 1, 2$  und  $4$ , so dass

$$f(r) = \frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4$$

Die Konstanten folgen aus den Randbedingungen,  $r \rightarrow \infty$  ergibt  $C = \frac{1}{2}U$  und  $D = 0$ , während  $r = a$  mit (8.13) die Gleichung  $f(a) = f'(a) = 0$  liefert, woraus  $A = \frac{1}{4}a^3U$  und  $B = -\frac{3}{4}aU$  bestimmt werden können. Wir erhalten so für  $\psi$

$$\psi(r, \theta) = \frac{U}{4} \left( \frac{a^3}{r} - 3ar + 2r^2 \right) \sin^2 \theta$$

Die Stromlinien  $\psi = \text{const}^1$  sind symmetrisch bezüglich der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene, d.h.  $\theta = \frac{\pi}{2} \pm \vartheta$ . Im Klartext, mittels (8.10) steht  $\mathbf{v}(r, \theta)$  nun vollständig zur Verfügung.

Wir wenden uns nun der Widerstandskraft zu. Dazu müssen wir den Druck  $p$  berechnen. Wir setzen

$$\tilde{\Delta}\psi = \frac{3}{2}U \frac{a}{r} \sin^2 \theta$$

in (8.12) ein und erhalten durch Integration

$$p(r, \theta) = p_\infty - \frac{3\mu a U}{2r^2} \cos \theta$$

Wie wir schon bei der Herleitung der Navier-Stokes-Gleichungen bei Cauchy gesehen haben, ist die Spannung  $\mathbf{t}$ , die auf ein Flächenelement  $dA$  mit dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$  an der Stelle  $\mathbf{x}$  wirkt, gegeben durch

$$t_i = \sum_j T_{ij} n_j = \sum_j (-p\delta_{ij} + \sigma_{ij}) n_j$$

mit dem Zähigkeitsspannungstensor  $\sigma_{ij} := \underbrace{\mu(\partial_i v_j + \partial_j v_i)}_{2\varepsilon_{ij}}$  für ein Geschwindigkeitsfeld

$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . Damit wir später *nicht* mehr von den kartesischen Koordinaten abhängig sind, beweisen wir folgendes Lemma.

#### Lemma 42

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{n} + \mu[2(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{v}]$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{v} &= \mathbf{n} \times \sum_i (\mathbf{e}_i \times \partial_i \mathbf{v}) = \sum_i (\mathbf{n} \cdot \partial_i \mathbf{v}) \mathbf{e}_i - \sum_i (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) \partial_i \mathbf{v} = \\ &= \sum_{ij} [n_j \partial_i v_j \mathbf{e}_i - n_i \partial_i (v_j \mathbf{e}_j)] = \sum_{ij} \left[ n_j \partial_i v_j \mathbf{e}_i - (n_i \partial_i v_j) \text{div} \sum_{ij} v_i \partial_j v_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j \right] \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Es ist  $\mathbf{v} \perp \text{grad } \psi$  wegen (8.10) und  $\text{grad } \psi = \left( \frac{\partial_r \psi}{r}, \frac{1}{r} \partial_\theta \psi \right)$ .

$$= \sum_{ij} [n_j \partial_i v_j \mathbf{e}_i - (n_j \partial_j v_i) \mathbf{e}_i]$$

□

Wenn wir diese hübsche Formel auf der Kugeloberfläche mit  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$  anwenden, wo der Gradient

$$\nabla = \mathbf{e}_r \partial_r + \mathbf{e}_\theta r^{-1} \partial_\theta + \mathbf{e}_\varphi (r \sin \theta)^{-1} \partial_\varphi$$

ist sowie  $r = a$  und  $\psi(a, \theta) = 0$  beachten, stellen wir fest

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= (-p + 2\mu \partial_r v_r) \mathbf{e}_r + 2\mu \partial_r v_\theta \mathbf{e}_\theta + 2\mu \partial_r v_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi \frac{\mu}{r} [\partial_r (rv_\theta) - \partial_\theta v_r] = \\ &= (-p + 2\mu \partial_r v_r) \mathbf{e}_r + \left[ \mu a \partial_r \frac{v_\theta}{r} + \frac{\mu}{a} \partial_\theta v_r \right] \mathbf{e}_\theta = \\ &= \underbrace{\left( -p_\infty + \frac{3\mu U}{2a} \cos \theta \right)}_{t_r} \mathbf{e}_r + \underbrace{\left( -\frac{3\mu U}{2a} \sin \theta \right)}_{t_\theta} \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

Was wir brauchen, ist

$$t := \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_3 = t_r \cos \theta - t_\theta \sin \theta = -p_\infty \cos \theta + \frac{3\mu U}{2a}$$

Die Widerstandskraft lässt sich als Flächenkraft mal Fläche wie folgt berechnen:

$$F_W = \int_0^\pi t 2\pi a \sin \theta a d\theta = -p_\infty \int_0^\pi \left( 2\pi a^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{3\mu U}{2a} 2\pi a^2 \sin \theta \right) d\theta = 6\pi \mu a U$$

Damit haben wir die Stokes'sche Widerstandsformel recht elegant hergeleitet.

$$\boxed{\mathbf{F}_W = 6\pi \mu a U \mathbf{e}_3}$$

Zum Vergleich mit dem Experiment definiert man sich gerne die dimensionslose Größe

$$C_D := \frac{F_W}{\frac{1}{2} \rho U^2 \pi a^2} = \frac{24}{Re}, \quad \text{mit } Re = 2aU\rho/\mu$$

und trägt sie doppelt logarithmisch gegen  $aU$  auf. Die Näherungen, die es uns erlaubt haben die Stokes'sche Formel herzuleiten, sind demnach gut, wenn  $Re \lesssim 1$  ist, was man daran erkennen kann, dass die Kurve eine Gerade ist.

# Kapitel 9

## Lineare Theorie der Wasserwellen

Zur Theorie der Wasserwellen setzen wir die  $y$ -Achse als die „Höhenachse“ fest, während die  $x$ - und die  $z$ -Achse die Wasseroberfläche beschreiben. Der Boden ist somit eine Funktion von  $x$  (siehe Skizze 9.1):

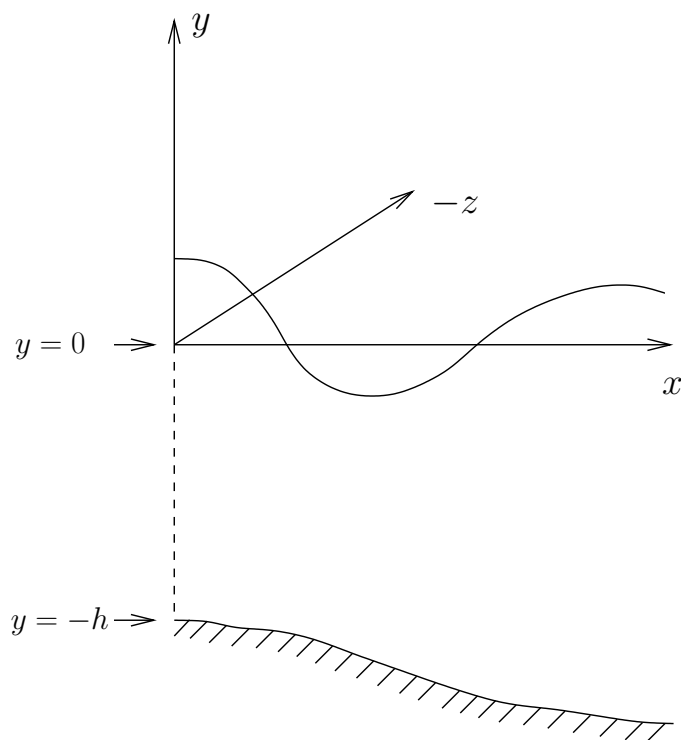


Abbildung 9.1: Koordinaten für die Beschreibung von Wasserwellen: Das System ist translationsinvariant bzgl. der  $z$ -Achse.

$$y = -h(x)$$

Desweiteren betrachten wir eine *nicht* viskose und *inkompressible* Flüssigkeit. Wir haben also  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  und  $\nu = \rho^{-1} \mu = 0$ , weswegen wir die Eulergleichungen ansetzen können.

$$D_t \mathbf{v} = \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}$$

Außerdem wird angenommen, dass die Flüssigkeit wirbelfrei ist. Es gilt also

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$$

weswegen ein Potential  $\varphi$  mit  $\mathbf{v} = \nabla \varphi$  existieren muss, so dass

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = \nabla \varphi \quad \Rightarrow \quad \sum_i \partial_i^2 \varphi = \Delta \varphi = 0$$

Demnach ist  $\varphi$  also harmonisch. Wir betrachten die schon weiter oben benutzte Identität

$$\mathbf{v} \times \underbrace{\operatorname{rot} \mathbf{v}}_{=0} = \nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

und erhalten somit

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \left( \frac{1}{2} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \right)$$

Wir führen wie üblich wieder das Gravitationspotential  $\gamma$  ein

$$\mathbf{g} = -\nabla(gy) =: -\nabla \gamma$$

mit  $g \approx 10 \text{ ms}^{-2}$ , so dass die Euler-Gleichung so aussieht:

$$\begin{aligned} \partial_t(\nabla \varphi) + \nabla \left( \frac{1}{2} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \right) &= -\rho^{-1} \nabla p - \nabla(gy) \\ \Rightarrow \nabla \left( \underbrace{\partial_t \varphi + \frac{1}{2} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + \rho^{-1} p + gy}_{:=C(t)} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Aufgrund der Transformation  $\varphi \rightarrow \varphi + \int_0^t C(s) ds$ , welche  $\mathbf{v} = \nabla \varphi$  unverändert lässt, können wir  $C(t) = 0$  nehmen und bekommen wieder die *Bernoulli-Gleichung* (1738)

$$\partial_t \varphi + \frac{1}{2} \underbrace{|\nabla \varphi|^2}_{=v^2} + \rho^{-1} p + gy = 0 \quad (9.1)$$

Sobald wir  $\varphi$  kennen, wissen wir auch über  $p$  Bescheid.

## 9.1 Randbedingungen für die freie Oberfläche

Vorläufig ist die Situation translationsinvariant bezüglich der  $z$ -Achse, vgl. die Figur zu Beginn des Kapitels. Also ist die Wasseroberfläche  $y$  eine Funktion von  $x$  und  $t$ . Die Wasseroberfläche wird ab jetzt  $\eta$  genannt:

$$y = \eta(x, t)$$

Da wir vorläufig die *Oberflächenspannung*  $\sigma$  vernachlässigen, ist an unserer freien Oberfläche  $p = p_{atm}$  eine Konstante. Mit  $p \rightarrow p - p_{atm}$  ergibt sich  $p = 0$  an der Oberfläche und wir haben somit folgende Randbedingungen

- (a) **dynamische Randbedingung** an einer freien Oberfläche. Mit Bernoulli folgt

$$\partial_t \varphi + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \rho^{-1} p + g y = 0|_{y=\eta(x,t)} \quad (9.2)$$

- (b) **kinematische Randbedingung** an einer freien Oberfläche: Die Flüssigkeit an der Oberfläche *bleibt* an der Oberfläche. Falls also ein Flüssigkeitselement an der Oberfläche die Trajektorie  $\mathbf{x}(t)$  verfolgt, dann ist seine  $y$ -Koordinate gleich der Auslenkung  $\eta(\mathbf{x}(t), t)$  der Oberfläche, d.h.

$$(\mathbf{x}(t))_y = \eta(\mathbf{x}(t), t).$$

Differentiation nach der Zeit liefert

$$v_y = \frac{d}{dt}(\mathbf{x}(t))_y = \frac{d}{dt}\eta(\mathbf{x}(t), t) = D_t \eta(\mathbf{x}, t)$$

und somit

$$\partial_y \varphi = \partial_t \eta(x, t) + (\partial_x \varphi) \partial_x \eta(x, t)|_{y=\eta(x,t)} \quad (9.3)$$

an der Oberfläche.

- (c) der **Boden** ist **nicht durchlässig**, so dass gilt

$$\partial_n \varphi = 0|_{y=-h(x)} \quad (9.4)$$

wie es bei der Eulergleichung üblich ist.

Nun kommt die Linearität ins Spiel. Es wird angenommen, dass die Auslenkung an der freien Oberfläche und sonstwo *viel kleiner als die Wellenlänge* ist, so dass Terme der Ordnung  $\geq 2$  vernachlässigt werden können. Dies wird später noch überprüft. Damit ergibt sich für  $h(x) \equiv h$

$$\Delta \varphi = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -h \leq y \leq \eta(x, t) \rightarrow 0$$

mit den Randbedingungen

$$\partial_t \varphi + g\eta = 0 \Big|_{y=\eta(x,t)} \quad (9.2)$$

wo

$$\varphi(x, y, t) \Big|_{y=\eta} = \varphi(x, 0, t) + \eta(\partial_y \varphi) \Big|_{y=0}$$

ist, so dass für die dynamische Randbedingung die Näherung

$$\partial_t \varphi + g\eta = 0 \Big|_{y=0} \quad (9.5)$$

bleibt, woraus  $\eta(x, t)$  folgt, falls  $\varphi$  bekannt ist, sowie für die kinematische Randbedingung

$$\partial_y \varphi = \partial_t \eta \Big|_{y=0} \quad (9.6)$$

und wir haben nach wie vor die Randbedingung für den Boden (9.4)

$$\partial_y \varphi = 0 \Big|_{y=-h}$$

Schließlich brauchen wir Anfangsbedingungen zur Zeit  $t = 0$  und eine Ausstrahlungsbedingung (radiation condition) in einem unendlichen Bereich.

## 9.2 Fortschreitende Wellen im Schwerfeld (gravity waves)

Der Ansatz ist

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = F(x - ct)Y(y)$$

aus  $x - ct = \text{const}$  folgt  $\frac{dx}{dt} = c$ , weshalb der Term  $x - ct$  eine Welle beschreibt, die mit der Phasengeschwindigkeit  $c$  in die positive (negative)  $x$ -Richtung läuft, falls  $c > 0$  ( $c < 0$ ) ist. Nun weiter

$$\Delta \varphi = \partial_x^2 \varphi + \partial_y^2 \varphi = 0 \Rightarrow F''Y + FY'' = 0$$

und deshalb

$$\underbrace{\frac{F''}{F}}_{x-ct} = - \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_y =: -k^2$$

Man sieht, dass  $\Delta \varphi = 0$  die beiden Funktionen  $F$  und  $Y$  koppelt. Wir haben also je eine Differentialgleichung für  $F$  und  $Y$

$$F'' + k^2 F = 0 \quad \text{und} \quad Y'' - k^2 Y = 0$$

Die Lösungen sind

$$F(x, t) = A \cos k(x - ct) + B \sin k(x - ct)$$

$$Y(y) = C e^{ky} + D e^{-ky}$$



Aus der Randbedingung  $\partial_y \varphi|_{y=-h} = 0$  folgt für  $Y(y)$

$$kC e^{-kh} - kD e^{kh} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = D e^{2kh}$$

$$\Rightarrow Y(y) = D(e^{2kh+ky} + e^{-ky}) = 2D e^{kh} \left( \frac{e^{k(y+h)} + e^{-k(y+h)}}{2} \right) = \underbrace{2D e^{kh}}_{\bar{D}} \cosh[k(y+h)]$$

so dass

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \cosh[k(y+h)] \underbrace{[\bar{A} \cos k(x-ct) + \bar{B} \sin k(x-ct)]}_{\text{periodisch mit Periode } \frac{2\pi}{k} := \lambda} \quad (9.7)$$

mit  $\bar{A} = A\bar{D}$  und  $\bar{B} = B\bar{D}$ . Wir kombinieren nun die linearisierten Randbedingungen (9.5)

$$\partial_t \varphi + g\eta = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_t^2 \varphi + g\partial_t \eta = 0|_{y=0}$$

und (9.6)

$$\partial_y \varphi = \partial_t \eta|_{y=0}$$

zu

$$\partial_t^2 \varphi + g\partial_y \varphi = 0|_{y=0}$$

Wenn wir (9.7) einsetzen, bekommen wir

$$[-(kc)^2 \cosh(kh) + gk \sinh(kh)] \underbrace{\{\bar{A} \cos [k(x-ct)] + \bar{B} \sin [k(x-ct)]\}}_{x \text{ beliebig}} = 0$$

$$\Rightarrow [-(kc)^2 \cosh(kh) + gk \sinh(kh)] = 0$$

was wir zur *Dispersionsrelation* umformen können:

$$\boxed{c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh)}$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c$  hängt von der Wellenlänge  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  ab.

$$c(\lambda) = \pm \left[ \frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \left( \frac{2\pi h}{\lambda} \right) \right]^{1/2}$$

Das  $\pm$  zeigt, dass die Welle in positive und negative Richtung laufen kann. Es gibt zwei wichtige Spezialfälle

(a) **Untiefes Wasser (shallow water)**

Hier ist

$$h \ll \lambda \Rightarrow \frac{h}{\lambda} \ll 1$$

so dass die Dispersionsrelation

$$c(\lambda) \approx \pm \left[ \frac{g\lambda}{2\pi} \frac{2\pi h}{\lambda} \right] = \pm \sqrt{gh}$$

liefert, also eine Welle *ohne* Dispersion.

(b) **Tiefes Wasser (deep water)**

Hier ist andererseits

$$h \gg \lambda \Rightarrow \frac{h}{\lambda} \gg 1$$

und wir erhalten

$$c(\lambda) \approx \pm \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

Schließlich bestimmen wir die Bahnen der Wasserteilchen. Dazu berechnen wir  $\eta(x, t)$  an der Oberfläche. Zuerst formen wir die eckige Klammer in (9.7) um

$$\begin{aligned} & \bar{A} \cos k(x - ct) + \bar{B} \sin k(x - ct) = \\ & (\bar{A}^2 + \bar{B}^2)^{1/2} \left[ \underbrace{\frac{\bar{A}}{\sqrt{\bar{A}^2 + \bar{B}^2}}}_{=:\sin \alpha} \cos k(x - ct) + \underbrace{\frac{\bar{B}}{\sqrt{\bar{A}^2 + \bar{B}^2}}}_{=:\cos \alpha} \sin k(x - ct) \right] = \\ & \underbrace{\sqrt{\bar{A}^2 + \bar{B}^2}}_{\bar{C}} \sin[\alpha + k(x - ct)] \end{aligned}$$

Das setzen wir in (9.7) ein

$$\varphi(x, t) = \bar{C} \cosh[k(y + h)] \sin[k(x - ct) + \alpha]_{\downarrow =:0}$$

Man kann  $\alpha$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich null setzen, da dies lediglich einer Verschiebung des Nullpunkts der  $x$ -Achse entspricht. Daraus ergibt sich mittels der linearisierten dynamischen Randbedingung (9.5) bekanntlich  $\eta$ :

$$\eta(x, t) = -g^{-1} \partial_t \varphi|_{y=0} = \underbrace{\bar{C} \frac{kc}{g} \cosh[k(y + h)]}_{=:a} \cos[k(x - ct)]$$

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen

$$\boxed{\begin{aligned} \eta(x, t) &= a \cos[k(x - ct)] \\ c^2(k) &= \frac{g}{k} \tanh(kh) \\ \varphi(\mathbf{x}, t) &= \frac{ag}{kc} \cdot \frac{\cosh[k(y+h)]}{\cosh(kh)} \sin[k(x - ct)] \end{aligned}}$$

Für tiefes Wasser haben wir  $\lambda \ll h \Rightarrow kh \gg 1$  und

$$\frac{1}{\cosh(kh)} \approx e^{-kh} \ll 1$$

eine *exponentielle* Dämpfung also. Da  $g$  eine (ersichtlich) wichtige Rolle spielt, nennt sich die obige Welle „progressive gravity wave“.

Als nächstes betrachten wir die Bahn eines Flüssigkeitsteils an der Oberfläche. Wir starten mit

$$\mathbf{x} := (x, y) = (X_0 + X_1(t), Y_0 + Y_1(t))$$

wobei  $\mathbf{x}_0 := (X_0, Y_0)$  und  $X_1$  und  $Y_1$  kleine Störungen sind mit  $X_1(0) = Y_1(0) = 0$ . Es gilt

$$\dot{X}_1 = \partial_x \varphi(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \frac{ag}{\cosh(kh)} \cosh[k(Y_0 + h)] \cos[k(X_0 - ct)]$$

$$\dot{Y}_1 = \partial_y \varphi(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \frac{ag}{\cosh(kh)} \sinh[k(Y_0 + h)] \sin[k(X_0 - ct)]$$

Einmal nach  $t$  integrieren und  $\sin^2[k(X_0 - ct)] + \cos^2[k(X_0 - ct)] = 1$  einsetzen ergibt die *Ellipse*

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{X_1}{\cosh[k(Y_0 + h)]} - \frac{ag \sin(kX_0)}{kc^2 \cosh(kh)} \right]^2 + \left[ \frac{Y_1}{\sinh[k(Y_0 + h)]} - \frac{ag \cos(kX_0)}{kc^2 \cosh(kh)} \right]^2 = \left( \frac{ag}{kc^2 \cosh(kh)} \right)^2 \\ & \Rightarrow \left[ \frac{X_1 kc^2 \cosh k}{ag(\cosh[k(Y_0 + h)])} - const \right]^2 + \left[ \frac{Y_1 kc^2 \cosh k}{ag(\sinh[k(Y_0 + h)])} - const \right]^2 = 1 \end{aligned}$$

Und wenn wir den Mittelpunkt der Ellipse verschieben, erhalten wir schließlich

$$\left[ \frac{X_1 kc^2 \cosh k}{ag(\cosh[k(Y_0 + h)])} \right]^2 + \left[ \frac{Y_1 kc^2 \cosh k}{ag(\sinh[k(Y_0 + h)])} \right]^2 = 1$$

so dass sich die Flüssigkeitsteile in einer kleinen Ellipse mit der *gleichen* Periode wie die große, treibende Welle bewegen. Die Hauptachsen  $b_1$  und  $b_2$  der Ellipse

$$\left( \frac{x}{b_1} \right)^2 + \left( \frac{y}{b_2} \right)^2 = 1$$

lauten

$$b_1 = \frac{ag \cosh[k(Y_0 + h)]}{kc^2 \cosh(kh)} \quad \text{und} \quad b_2 = \frac{ag \sinh[k(Y_0 + h)]}{kc^2 \cosh(kh)}$$

und sind parallel zur  $x$ - und  $y$ -Achse. Wenn  $Y_0 \rightarrow -h$ , so wird die vertikale Hauptachse immer kürzer und damit die Ellipse immer dünner.

**Bemerkung:**

- Am Boden würde die Flüssigkeit „hin und her“ rutschen, was *mit* Viskosität schwer vorstellbar wäre.
- In führender Ordnung gibt es, wie man sieht, keinen Netto-Massentransport, in zweiter Ordnung schon.

### 9.3 Begründung der Plausibilität der Linearisierung

In der kinematischen Randbedingung (9.3) wurde

$$\partial_t \eta = \mathcal{O}(a/T) = \mathcal{O}(2\pi ac/\lambda) = \mathcal{O}(ack)$$

mit der Periode  $T$  beibehalten, aber

$$\partial_x \varphi \partial_x \eta = \mathcal{O}(a^2 gk/c)$$

vernachlässigt. Die Größenordnung von  $\partial_x \varphi \partial_x \eta$  folgt aus

$$\partial_x \varphi|_{y=0} = \frac{ag}{kc} \frac{\cosh[k(0+h)]}{\cosh(kh)} \cdot \frac{1}{k} \cos[k(x-ct)] = \frac{ag}{c} \cos[k(x-ct)]$$

$$\Rightarrow (\partial_x \varphi) = ag/c$$

und

$$\mathcal{O}(\partial_x \eta) = a/\lambda$$

Diese Näherung ist somit richtig, solange  $a^2 gk/c \ll ack$  ist, also solange

$$ag \ll c^2$$

gilt. Mit der Dispersionsrelation

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh)$$

folgt

$$\frac{g}{k} \tanh(kh) \gg ak$$

In tiefen Gewässern ist  $\tanh(kh) \approx 1$ , weshalb wir

$$ak \ll 1 \Leftrightarrow \frac{a}{\lambda} \ll 1$$

für die Näherung fordern müssen. In untiefen Gewässern haben wir  $\tanh(kh) \approx kh$  und damit

$$a \ll h \Leftrightarrow \frac{a}{h} \ll 1$$

Die lineare Näherung ist also möglich, wenn folgende beiden Bedingungen gelten

$$\boxed{a \ll \lambda \quad \text{und} \quad a \ll h}$$

## 9.4 Gruppengeschwindigkeit

In der Physik gibt es drei Typen Geschwindigkeiten:

- die **Teilchengeschwindigkeit**, mit der die Flüssigkeitsteilchen ihre oft harmonische Bewegung bezüglich ihres Gleichgewichtspunktes durchführen.
- die **Phasengeschwindigkeit**, mit der sich die Phasen im Medium fortpflanzen, wie in

$$\underbrace{\cos[k(x - ct)]}_{const} \Rightarrow k \left( \frac{dx}{dt} - c \right) = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = c$$

- die **Gruppengeschwindigkeit**, also eine Überlagerung von Wellen. In einer *linearen* Theorie kann man Wellen, die *verschiedene* Frequenzen (bzw. Wellenvektoren  $k$ ) haben, immer überlagern. Diese bilden dann eine *Gruppe*. Wegen der verschiedenen Wellenvektoren haben die Elementarwellen aufgrund der Dispersionsrelation auch verschiedene Phasengeschwindigkeiten.

Wir betrachten zuerst zwei Wellen mit gleicher Amplitude, aber *leicht* verschiedener Wellenzahl  $k$  und Kreisfrequenz  $\omega$ .

$$\begin{aligned} & a[\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t)] = \\ & = 2a \underbrace{\cos\left[\frac{1}{2}(k_1 - k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right]}_{=:A(x,t)} \underbrace{\cos\left[\frac{1}{2}(k_1 + k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right]}_{\substack{=:k \\ =:\omega}} = A \cos(kx - \omega t) \end{aligned}$$

Die Überlagerung sieht also praktisch wie die ursprünglichen Wellen aus, außer dass die Amplitude  $A$  *langsam* in Raum und Zeit moduliert wird, und zwar mit der Wellenzahl  $\frac{1}{2}\Delta k$  und der Frequenz  $\frac{1}{2}\Delta\omega$ . Deswegen betrachten wir  $A$  selbst als Welle mit der Geschwindigkeit

$$\boxed{c_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \rightarrow \frac{d\omega}{dk}}$$

Wir formen den Ausdruck für  $c_g$  um.

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kc) = c + k \frac{dc}{dk} \underset{dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2}}{=} c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}$$

Solange  $\frac{dc}{d\lambda} < 0$  ist, ist  $c_g < c$ . Dieses Ergebnis kombinieren wir nun mit der Dispersionsrelation, die wir weiter oben für die Wasserwellen in linearer Näherung hergeleitet haben.

$$c^2(k) = \frac{g}{k} \tanh(kh)$$

Um uns das Ableiten zu erleichtern formen wir  $c_g = c + k \frac{dc}{dk}$  um in

$$c_g = c + \frac{k}{2c} \frac{dc^2}{dk}$$

und erhalten für obige Dispersionsrelation

$$c_g = \frac{c}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right)$$

Damit haben wir für tiefes Wasser ( $kh \gg 1$ )

$$c_g = \frac{c}{2}$$

und für untiefes Wasser ( $kh \ll 1$ )

$$c_g = c$$

Wir betrachten nun eine Überlagerung vieler Wellen, die die Wellenzahlen  $k_i \approx k$  und die Kreisfrequenzen  $\omega_i \approx \omega$  haben. Wir lassen nun auch verschiedene Amplituden  $a_i$  zu:

$$\begin{aligned} & a \cos(kx - \omega t) + \sum_i a_i \cos[(k + \delta k_i)x - (\omega + \delta \omega_i)t + \varepsilon_i] = \\ & = \underbrace{\left[ a + \sum_i a_i \cos(\delta k_i x - \delta \omega_i t + \varepsilon_i) \right]}_{=:A} \cos(kx - \omega t) \\ & \quad - \underbrace{\left[ \sum_i a_i \sin(\delta k_i x - \delta \omega_i t + \varepsilon_i) \right]}_{=:B} \sin(kx - \omega t) = \\ & = A \cos(kx - \omega t) - B \sin(kx - \omega t) =: C \cos(kx - \omega t + \varepsilon) \end{aligned}$$

mit  $C^2 := A^2 + B^2$  und  $\tan \varepsilon := \frac{B}{A}$ . In  $C$  stecken noch die Argumente des Sinus und Cosinus, also  $\delta k_i x - \delta \omega_i t + \varepsilon_i$ , die wir folgendermaßen umformen

$$\delta k_i x - \delta \omega_i t + \varepsilon_i = \delta k_i \left( x - \frac{\delta \omega_i}{\delta k_i} t \right) + \varepsilon_i = \delta k_i (x - c_g t) + \varepsilon_i$$

Also ändert sich  $C$  in guter Näherung mit der Gruppengeschwindigkeit  $c_g$ . Damit ist dieser Begriff sinnvoll, solange  $\frac{\delta \omega_i}{\delta k_i}$  zu einem wohldefinierten, also von  $i$  unabhängigen  $c_g$  führt. Die Einhüllende  $C$  definiert somit die Gruppe.

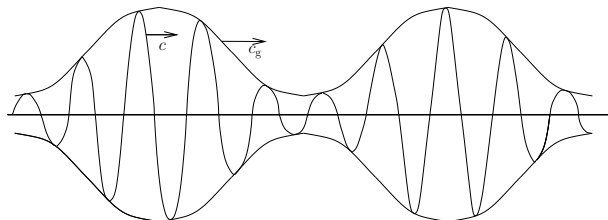


Abbildung 9.2: ??

Mathematisch präziser sollten wir die Überlagerung als Integral betrachten

$$I(t) = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{a}(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} dk$$

und fragen, wie sich  $I(t)$  asymptotisch, also für  $t \rightarrow \infty$  verhält. Dies ist kein einfaches Problem und führt unter anderem auf die *Methode der stationären Phase* und damit zur Literatur, z.B. L.A. Segel, *Mathematics applied to continuum mechanics* (Macmillan, New York, 1977).

**Bemerkung:**

- der Begriff der Gruppengeschwindigkeit hat nur dann einen Sinn, wenn  $c_g = \frac{d\omega}{dk}$  auf dem Träger von  $\tilde{a}$ , also auf  $\operatorname{supp} \tilde{a}$ , praktisch *konstant* ist. Die obige Diskretisierung zeigt dann schon, wie schnell sich das Wellenpaket fortpflanzt.
- Es gibt folgende Skizze als nette Interpretation von  $c_g = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}$ , wenn  $c$  als Funktion von  $\lambda$  zur Verfügung steht.

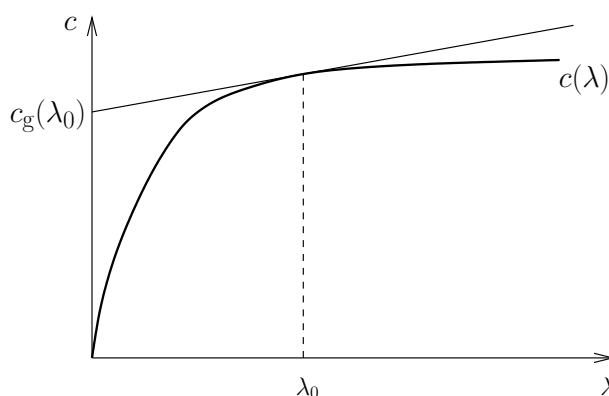


Abbildung 9.3: ??

Diese Konstruktion liefert auch sofort  $c_g(\lambda_0) < c(\lambda_0)$ , solange  $\frac{dc}{d\lambda} < 0$  ist.

## 9.5 Stehende Wellen im Schwerfeld

Nach wie vor gilt die Laplace-Gleichung

$$\Delta\varphi = 0$$

Als Ansatz wählen wir nun

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = X(x)Y(y)T(t)$$

Einsetzen in die Laplace-Gleichung liefert

$$(X''Y + XY'')T = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -k^2$$

Also

$$X'' + k^2 X = 0 \quad \text{und} \quad Y'' - k^2 Y = 0$$

Die Lösung für  $X(x)$  ist somit

$$X(x) = C \cos(kx) + D \sin(kx)$$

Mit der Randbedingung für den Boden, also  $\partial_y \varphi|_{y=-h} = 0$ , folgt für  $Y(y)$

$$Y(y) = B \cosh[k(y + h)]$$

Das fassen wir zu  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  zusammen

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \cosh[k(y + h)][\bar{C} \cos(kx) + \bar{D} \sin(kx)]T(t)$$

Mit der linearisierten dynamischen Randbedingung (9.5) folgt, wenn sie nach der Zeit abgeleitet wird:

$$\partial_t^2 \varphi + g \partial_y \varphi = 0|_{y=0}$$

Daraus folgt

$$[T'' \cosh(kh) + T g k \sinh(kh)][\bar{C} \cos(kx) + \bar{D} \sin(kx)] = 0$$

und daraus folgt wiederum

$$T'' \cosh(kh) + T g k \sinh(kh) = 0$$

Und wir erhalten mit der Dispersionsrelation  $\omega^2(k) = g k \tanh(kh)$

$$T'' + \omega^2(k)T = 0$$

Die Lösung ist

$$T(t) = F \cos \omega t + G \sin(\omega t) =: \bar{F} \cos(\omega t + \phi)$$

mit der Phase  $\phi$ . Zu guter Letzt verschieben wir die  $x$ - und die  $t$ -Achse und erhalten

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = L \cosh[k(y + h)] \cdot \cos(kx) \cdot \cos(\omega t)$$

Nun formen wir diese Gleichung noch mittels (9.5) zu einer Gleichung für die Oberfläche  $\eta(x, t)$  um

$$\eta(x, t) = \frac{L\omega}{g} \cosh(kh) \cdot \cos(kh) \cdot \sin(\omega t)$$

Schließlich definieren wir

$$a := \frac{L\omega}{g} \cosh(kh)$$

und erhalten die vollständige Lösung





so dass

$$p(x, y) = p_{\text{atm}} + \rho g(h(x, t) - h_0(x) - y)$$

Nun sehen wir uns die  $x$ -Komponente der Euler-Gleichung an

$$a_x = D_t v_x = -\frac{1}{\rho} \partial_x p$$

Wir setzen den eben ermittelten Druck ein

$$\partial_t v_x + v_x \partial_x v_x + g \partial_x \underbrace{[h(x, t) - h_0(x)]}_{\eta(x, t)} = 0 \quad (9.8)$$

Die Massenerhaltung liefert eine zweite Gleichung

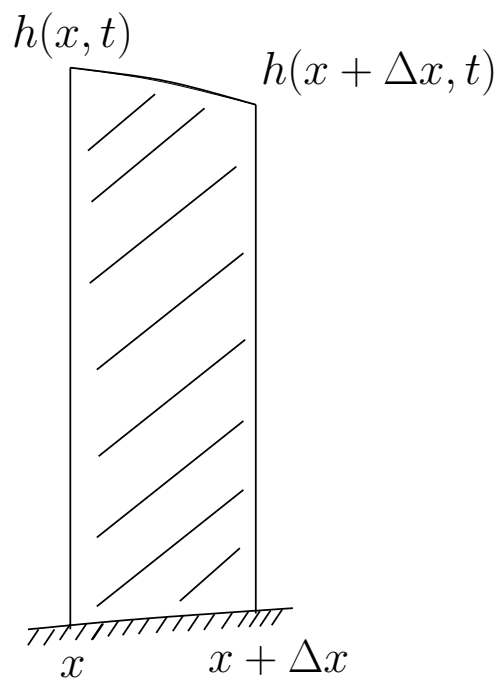


Abbildung 9.5: ??

$$\underbrace{\partial_t [\rho h(x, t) \Delta x]}_{\text{Masse in der Scheibe}} = \underbrace{(\rho h(x, t) v_x)(x)}_{\text{Einstrom}} - \underbrace{(\rho h(x, t) v_x)(x + \Delta x)}_{\text{Ausstrom}}$$

Wir lassen  $\Delta x$  gegen null gehen

$$\partial_t [\rho h(x, t)] = -\partial_x [\rho h(x, t) v_x]$$

so dass wir nach Kürzen der Dichte  $\rho$  eine zweite Gleichung für die zweidimensionale Bewegung erhalten:

$$\partial_t h(x, t) = -\partial_x h(x, t) v_x \quad (9.9)$$

Die beiden Gleichungen (9.8) und (9.9) sind *nichtlinear* und bilden zusammen die Gleichungen für *untiefes Wasser* (shallow water equations).

### 9.6.1 Lineare Annäherung

Wir machen zwei Annahmen

$$v_x \ll 1 \quad \text{und} \quad h(x, t) - h_0(x) =: \eta(x, t) \ll 1$$

Diese setzen wir zuerst in (9.8) ein und bekommen

$$\partial_t v_x + g \partial_x \eta(x, t) = 0$$

da wir den Term  $v_x \partial_x v_x$  vernachlässigen können. Nun zur Gleichung (9.9). Mit

$$\partial_t h = \partial_t \eta(x, t)$$

und

$$h(x, t) v_x = [\eta(x, t) + h_0(x)] v_x \approx h_0(x) v_x$$

folgt

$$\partial_t \eta(x, t) + \partial_x [h_0(x) v_x] = 0$$

Wir leiten die untere Gleichung nach der Zeit ab und setzen die obere ein

$$\partial_t^2 \eta(x, t) = -\partial_x \partial_t [h_0(x) v_x] = -\partial_x [h_0(x) \underbrace{\partial_t v_x}_{-g \partial_x \eta(x, t)}] = g \partial_x [h_0(x) \partial_x \eta(x, t)]$$

Damit haben wir eine *verallgemeinerte* Wellengleichung für  $\eta(x, t)$  hergeleitet.

$$\boxed{\partial_t^2 \eta(x, t) = g \partial_x [h_0(x) \partial_x \eta(x, t)]}$$

Wenn  $h_0(x) = h_0 = \text{const}$  eine Konstante ist, liefert die verallgemeinerte Wellengleichung

$$c^{-2} \partial_t^2 \eta(x, t) = \partial_x^2 \eta(x, t)$$

mit  $c = \sqrt{gh_0}$ . Diese Differentialgleichung liefert eine Welle ohne Dispersion, da sie eine von der Wellenlänge unabhängige Phasengeschwindigkeit liefert. Die allgemeine Lösung ist

$$\eta(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

wobei  $f$  und  $g$  zwei beliebige zweimal differenzierbare Funktionen sind.

**Beweis:**

Wir führen neue Variablen ein:

$$u := x + ct \quad \text{und} \quad v := x - ct$$

Unter Beachtung der Kettenregel finden wir

$$\partial_x \eta(u(x), v(x), t) = \partial_u \eta(u(x), v(x), t) + \partial_v \eta(u(x), v(x), t)$$

da  $\partial_x u(x) = \partial_x v(x) = 1$  und ganz analog (im Folgenden lassen wir die funktionale Abhängigkeit von  $\eta$  der besseren Übersichtlichkeit halber weg)

$$\partial_x^2 \eta = \partial_u^2 \eta + 2\partial_u \partial_v \eta + \partial_v^2 \eta$$

Genauso gilt

$$\partial_t^2 \eta = c^2(\partial_u^2 \eta - 2\partial_u \partial_v \eta + \partial_v^2 \eta)$$

Daraus folgt mit der Wellengleichung, dass

$$\partial_u \partial_v = 0$$

sein muss. Diese Gleichung integrieren wir nun nach  $u$

$$\partial_v \eta = F(v) + \text{const}$$

und nochmal nach  $v$

$$\eta = \underbrace{\int_v F(v') dv'}_{=:f(v)} + g(u) + \text{const} \stackrel{\uparrow}{\text{const}:=0} = f(v) + g(u) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

□

Man beachte, dass  $f$  nach rechts läuft und  $g$  nach links. Dabei stören sie sich nicht, wie *Solitonen*.

Als Alternativbeweis dafür, dass  $\eta(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$  die allgemeinste Lösung ist, zeigen wir, dass sie sich einem *beliebigen* Anfangszustand anpassen lässt:

Sei zu Zeit  $t = 0$

$$\eta(x, 0) = f_1(x) \quad \text{und} \quad \partial_t \eta(x, 0) = f_2(x)$$

so dass

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= f_1(x) \\ f'(x) - g'(x) &= \frac{1}{c} f_2(x) \end{aligned}$$

Wir integrieren die untere Gleichung nach  $x$

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x f_2(x') dx' + \underbrace{[f(x_0) - g(x_0)]}_{\text{const}:=0}$$

Durch Addieren (Subtrahieren) der integrierten unteren Gleichung zur (von der) oberen Gleichung erhalten wir schließlich

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[ f_1(x) + \frac{1}{c} \int_{x_0}^x f_2(x') dx' \right]$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \left[ f_1(x) - \frac{1}{c} \int_{x_0}^x f_2(x') dx' \right]$$

**Beispiel**

Sei

$$f_2(x) = 0 \Rightarrow \eta(x, t) = \frac{1}{2} [f_1(x - ct) + f_1(x + ct)]$$

d.h. die Strömung wandert zur einen Hälfte nach rechts, zur anderen nach links, beides ohne Formänderung, also unverzerrt, wie in folgender Skizze: □

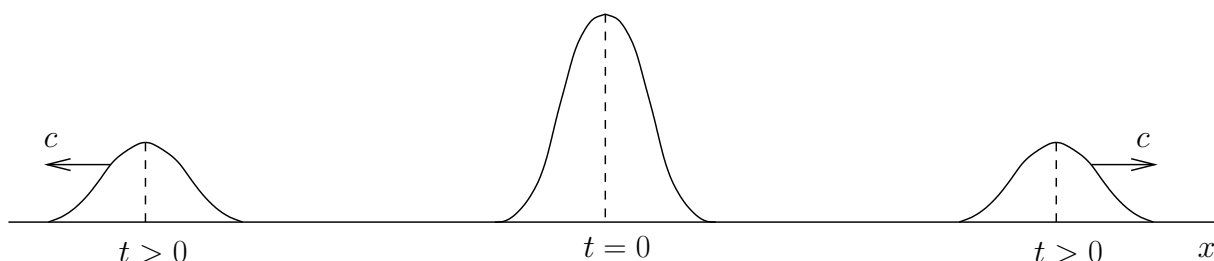


Abbildung 9.6: ??

Damit lässt sich  $\eta(x, t)$  sehr kompakt schreiben. Wir definieren dazu  $f_1(x) = \eta_0(x)$  und  $f_2(x) = -v_0(x)$ :

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2} [\eta_0(x - ct) + \eta_0(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(x') dx'$$

**9.6.2 Tsunamis**

Die Skizze zeigt, wie im Ozean durch ein Erdbeben eine Welle erzeugt wird, die sich auf das Ufer zubewegt, wobei sich die Tiefe des Wassers vermindert. Die vom Erdbeben im

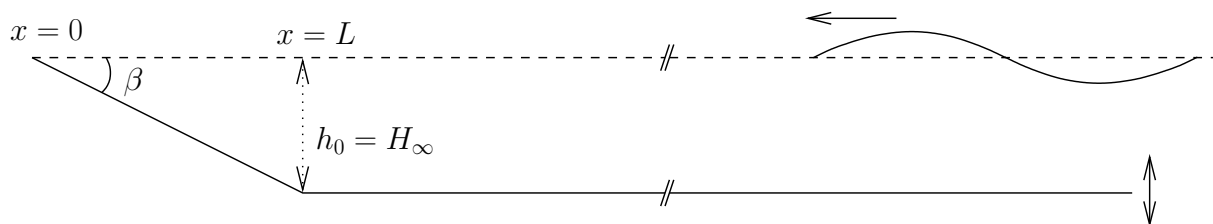


Abbildung 9.7: ??

Meer erzeugten Wellen haben eine relativ kleine Amplitude im Bereich von einigen Metern. Durch die Steigung des Meeresbodens zum Ufer hin nimmt die Wellenlänge stark ab und gleichzeitig die Amplitude stark zu, was die Ursache der verheerenden Wirkung der

Tsunamis ist.

Für die Wassertiefe  $h_0(x)$  gilt

$$h_0(x) = \begin{cases} \frac{H_\infty}{L}x & \text{für } 0 \leq x \leq L \\ H_\infty & \text{für } x \geq L \end{cases}$$

**Bemerkung:** Im Ozean nimmt die Geschwindigkeit der Welle Werte von  $v \approx 700 \text{ km/h} \approx 200 \text{ m/s}$  an. Mit der für *tiefes* Wasser gültigen Dispersionsrelation

$$c(\lambda) \approx \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \approx 200 \text{ m/s}$$

erhalten wir Wellenlängen im Bereich von  $\lambda \approx 25 \text{ km}$ . Wir haben also große Wellenlängen und damit *untiefes* Wasser, weswegen wir die oben hergeleitete lineare Theorie für Wellen im untiefen Wasser verwenden können.

Da  $H_\infty$  sehr viel kleiner ist als die Strecke  $L$ , nach der sich die Tiefe nicht mehr ändert, können wir schreiben

$$H_\infty/L \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \tan \beta = H_\infty/L \approx \beta$$

Es geht weiter mit der verallgemeinerten Wellengleichung

$$\partial_t^2 \eta(x, t) = g \partial_x [h_0(x) \partial_x \eta(x, t)] = g \partial_x [\beta x \partial_x \eta(x, t)] = g \beta x \partial_x^2 \eta(x, t) + g \beta \partial_x \eta(x, t) \quad (9.10)$$

mit der Randbedingung

$$\eta(L, t) = a \cos(\omega t + \varepsilon)$$

Deswegen wählen wir als Ansatz für  $0 \leq x \leq L$

$$\eta(x, t) = \cos(\omega t + \varepsilon) H(x)$$

In Gleichung (9.10) eingesetzt liefert das

$$x \frac{d^2 H(x)}{dx^2} + \frac{dH(x)}{dx} + \frac{\omega^2}{g\beta} H(x) = 0$$

mit  $H(L) = a$ . Wir substituieren

$$\Rightarrow \quad \frac{dH(x)}{dx} = \frac{1}{4s} \frac{dH(s)}{ds} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 H(x)}{dx^2} = \frac{1}{16s^2} \frac{d^2 H(s)}{ds^2} - \frac{1}{16s^3} \frac{dH(s)}{ds}$$

In die Differentialgleichung eingesetzt ergibt dies die *Bessel'sche* Differentialgleichung nullter Ordnung

$$\frac{d^2 H(s)}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dH(s)}{ds} + \left( \frac{8\omega^2}{g\beta} \right) H(s) = 0$$

Wir transformieren noch einmal, und zwar  $t := \sqrt{\frac{8\omega^2}{g\beta}} s$ , und erhalten

$$H''(t) + t^{-1} H'(t) + H(t) = 0$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist die Besselfunktion nullter Ordnung  $J_0$

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(k+1)}$$

mit der Gamma-Funktion  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$  für  $x > 0$ . Wir transformieren zurück auf  $s$

$$H(s) = AJ_0\left(\sqrt{\frac{8\omega^2}{g\beta}} s\right)$$

mit  $H(L) = a$ . Schließlich ist die Lösung für  $x$

$$\eta(x, t) = \frac{a}{J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g\beta}} L^{1/2}\right)} J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g\beta}} x^{1/2}\right) \cos(\omega t + \varepsilon)$$

Die Amplitude wird sehr viel größer, was man am Term  $a/J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g\beta}} L^{1/2}\right)$  erkennen kann, da der Nenner  $J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g\beta}} L^{1/2}\right) \ll 1$  ist. Die Frequenz wird wegen der Wurzel  $\sqrt{x}$  in  $J_0$  kleiner. Dieser Effekt wird bei  $x = 0$  durch die Wurzelsingularität noch verstärkt.

**Bemerkung:** Tsunamis können zehn bis dreißig Meter hoch werden, während  $a$  etwa im Bereich von eins bis drei Metern liegt. Im Ozean ist  $a/\lambda \approx 10^{-3}$  und  $c \approx 200$  m/s, während die Werte an der Küste dagegen typischerweise bei  $3 \text{ m} \lesssim a \lesssim 30 \text{ m}$  und  $c \approx 15$  m/s liegen.

Die Rechtfertigung der linearen Theorie findet man in

C.E. Synolakis, Tsunami rump on steep slopes: How good linear theory really is, *Natural Hazards* 4 (1991) S. 221-234

Dort wird unter Anderem gezeigt, dass man statt  $\beta$  wieder  $\tan \beta$  schreiben sollte und es wird ein Vergleich mit der vollständigen nichtlinearen Theorie angestellt.





# Kapitel 10

## Kapillarität

Bis jetzt haben wir nur die Schwerkraft als die eine Flüssigkeit ins Gleichgewicht rücktreibende Kraft betrachtet. Es gibt jedoch noch eine zweite Kraft infolge der *Oberflächenspannung*  $\sigma$ , die Kapillarität, da an der Oberfläche die intermolekulären Kräfte nicht allseitig kompensiert werden.

Um zu sehen, wie die Oberflächenspannung  $\sigma$  sich auswirkt, werden wir erst die *Laplace-Young-Gleichungen* herleiten. Dazu benötigen wir den Begriff der *Krümmung*. Eine kompakte Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  wird ganz allgemein von  $F(\mathbf{x}) = 0$  dargestellt, wobei  $F$  oft genug differenzierbar sei. Diese Gleichung lässt sich lokal in die Form von *Monge*

$$x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$$

schreiben. Z.B. haben wir in drei Dimensionen  $z = f(x, y)$ . Weiter mit Taylor

$$\begin{aligned} z = f(\underbrace{x, y}_{=\mathbf{x}}) &= \underbrace{f(\mathbf{x}_0)}_{=z_0} + \partial_x f(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}(x - x_0) + \partial_y f(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}(y - y_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} & \partial_{xy} f(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \\ \partial_{yx} f(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} & \partial_{yy} f(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \end{pmatrix} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \dots \end{aligned}$$

Damit können wir die Oberfläche lokal bezüglich der Tangential-Ebene

$$(z - z_0) \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_x f(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \\ \partial_y f(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{Normalenvektor } \mathbf{n}} = 0$$

als reell-symmetrische quadratische Form darstellen, die man mittels einer orthogonalen Transformation diagonalisieren kann:

$$\frac{1}{2} \mathbf{x}' A \mathbf{x} \rightarrow \frac{1}{2} \lambda_1 x_1^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 x_2^2$$

mit zwei *orthogonalen* Hauptrichtungen, die mit  $x_1$  und  $x_2$  korrespondieren. Diese werde *Hauptkrümmungen* genannt.

Was ist die Krümmung  $\kappa$  einer Kurve  $y = y(x)$ ?

Man legt eine Kreislinie in die Kurve und kann so die Krümmung bestimmen, da die Krümmung des Kreises der reziproke Radius  $R$  ist, siehe Skizze: Der Radius ist so definiert:

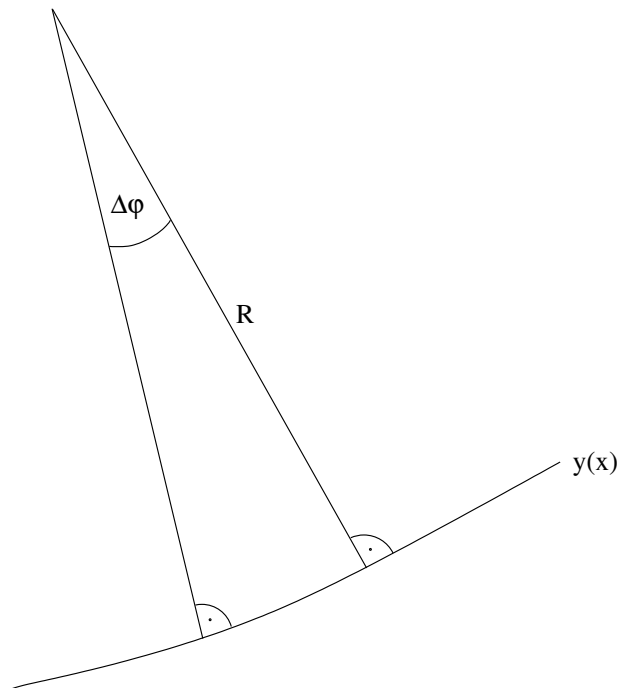


Abbildung 10.1: ??

$$R = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} = \left| \frac{\Delta s}{\Delta\varphi} \right| = \left| \frac{ds}{d\varphi} \right|$$

Außerdem folgt aus der Skizze

$$\begin{aligned} \Delta s &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \\ \Rightarrow \frac{\Delta s}{\Delta x} &= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \end{aligned}$$

Und der Limes  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0}$  liefert

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (10.1)$$

Als nächstes leiten wir die Gleichung  $\frac{dy}{dx} = \tan \varphi$  nach  $x$  ab:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(\tan \varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{dx} =$$

$$= (1 + \tan^2 \varphi) \frac{d\varphi}{dx} = \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \frac{d\varphi}{dx}$$

Also

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \frac{d\varphi}{dx} \quad (10.2)$$

Des Weiteren gilt nach der Kettenregel

$$\frac{ds}{dx} = \frac{ds}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} \quad (10.3)$$

Unsere Ergebnisse setzen wir nun in die Definition des Radius ein:

$$R = \left| \frac{ds}{d\varphi} \right| = \left| \frac{ds}{dx} / \frac{d\varphi}{dx} \right| = \left| \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y'' / [1 + (y')^2]} \right| = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|}$$

Damit können wir die Krümmung  $\kappa$  angeben

$$\kappa = \frac{1}{R} = y'' [1 + (y')^2]^{-3/2}$$

Definitionsgemäß wurde der Betrag weggelassen, damit Kurven wie  $\smile$  eine positive und Kurven wie  $\frown$  eine negative Krümmung haben. D.h.

$$\operatorname{sgn}(y'') = \pm 1$$

besagt, an welcher Seite der Tangente die Kurve und der Krümmungsradius liegen, also oberhalb bzw. unterhalb.

**Bemerkung:** Man sieht, dass für den Fall, dass  $y' = 0$  ist,

$$\kappa = y''$$

gilt.

**Beispiel:**

Wir betrachten die Parabel

$$y = \frac{1}{2}ax^2$$

und deshalb

$$y' = ax \quad \text{und} \quad y'' = a$$

Damit können wir schon die Krümmung berechnen

$$\kappa = y'' [1 + (y')^2]^{-3/2} = a[1 + a^2x^2]^{-3/2}$$

Also ist die Krümmung

$$\kappa = a \quad \text{an der Stelle} \quad x = 0$$

und

$$\kappa \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad x \rightarrow \infty$$

## 10.1 Zweidimensionale Mannigfaltigkeit

Die Funktion (???) wird lokal durch den Paraboloiden

$$z = f(x, y) \approx \frac{1}{2}(x, y) \begin{pmatrix} \partial_{xx}f & \partial_{xy}f \\ \partial_{yx}f & \partial_{yy}f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: \frac{1}{2}(x, y) \partial_2 f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

angenähert. Durch eine Drehung, die die Achsen des Koordinatensystems in Richtung orthogonaler Eigenvektoren zeigen lässt, kann man  $z$  immer schreiben als:

$$z = f(x, y) = \frac{1}{2}\lambda_1 x^2 + \frac{1}{2}\lambda_2 y^2$$

wobei  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  die Eigenwerte von  $\partial_2 f$  sind. Also gibt es zwei „Hauptkrümmungen“  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  mit

$$\lambda_1 = \partial_{xx}f \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \partial_{yy}f$$

### Definition 43 (Mittlere Krümmung)

Die mittlere Krümmung  $H$  ist definiert als

$$H = \kappa_1 + \kappa_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Hier sind  $R_1$  und  $R_2$  die Krümmungsradien der Schnittkurven in den beiden orthogonalen Schnittebenen  $(x, z)$  und  $(y, z)$ .

Da

$$H = \text{Tr} \begin{pmatrix} \partial_{xx}f & \partial_{xy}f \\ \partial_{yx}f & \partial_{yy}f \end{pmatrix}$$

invariant gegenüber einer Drehung des Koordinatensystems ist, lässt sich  $H$  auch definieren als die Summe der Krümmungen der Schnittkurven in zwei *beliebigen* orthogonalen Schnittebenen (parallel zu  $\mathbf{n}$ ). Außerdem kann man zeigen, dass  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  unabhängig vom orthogonalen Schnittebenenpaar ist, wie es für eine geometrische Eigenschaft auch sein soll.

**Bemerkung:** Selbstverständlich ist die differentialgeometrische Definition der Krümmung intrinsisch, d.h. unabhängig von der spezifischen Darstellung der Oberfläche.

## 10.2 Seifenblase

Sei  $p$  der Druckunterschied mit

$$p = p_{\text{in}} - p_{\text{out}} > 0$$

einer Seifenblase mit Oberflächenspannung  $\sigma$ . Da es zwei Oberflächen gibt, sollten wir auch zwei Spannungen betrachten. Wir haben dann  $\sigma' = 2\sigma$  und zwar vorläufig in einem *kleinen* Teilstück mit Hauptkrümmungen  $\kappa_i = R_i^{-1}$ . Wir betrachten bei gegebenem  $p$  eine kleine

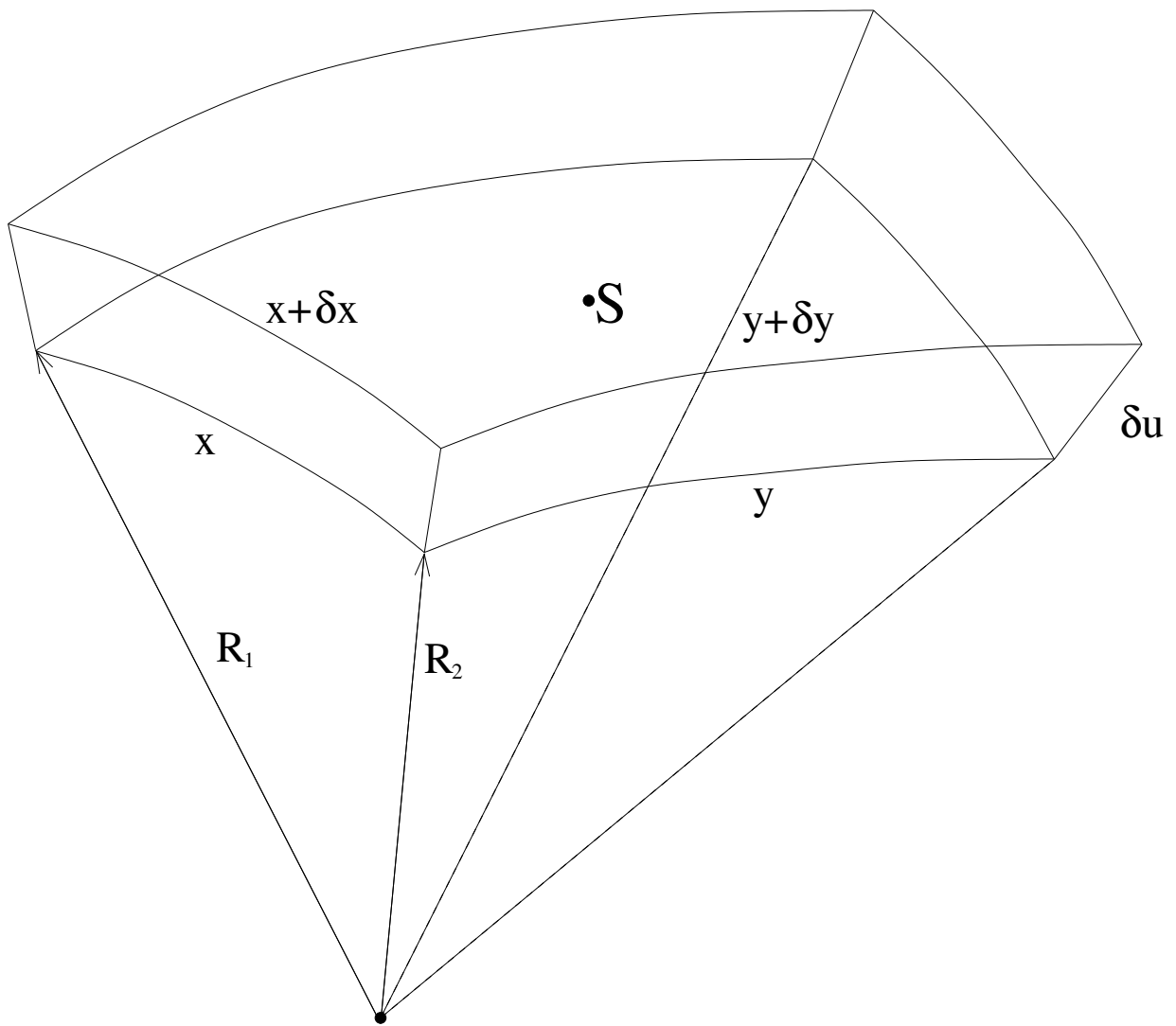


Abbildung 10.2: ??

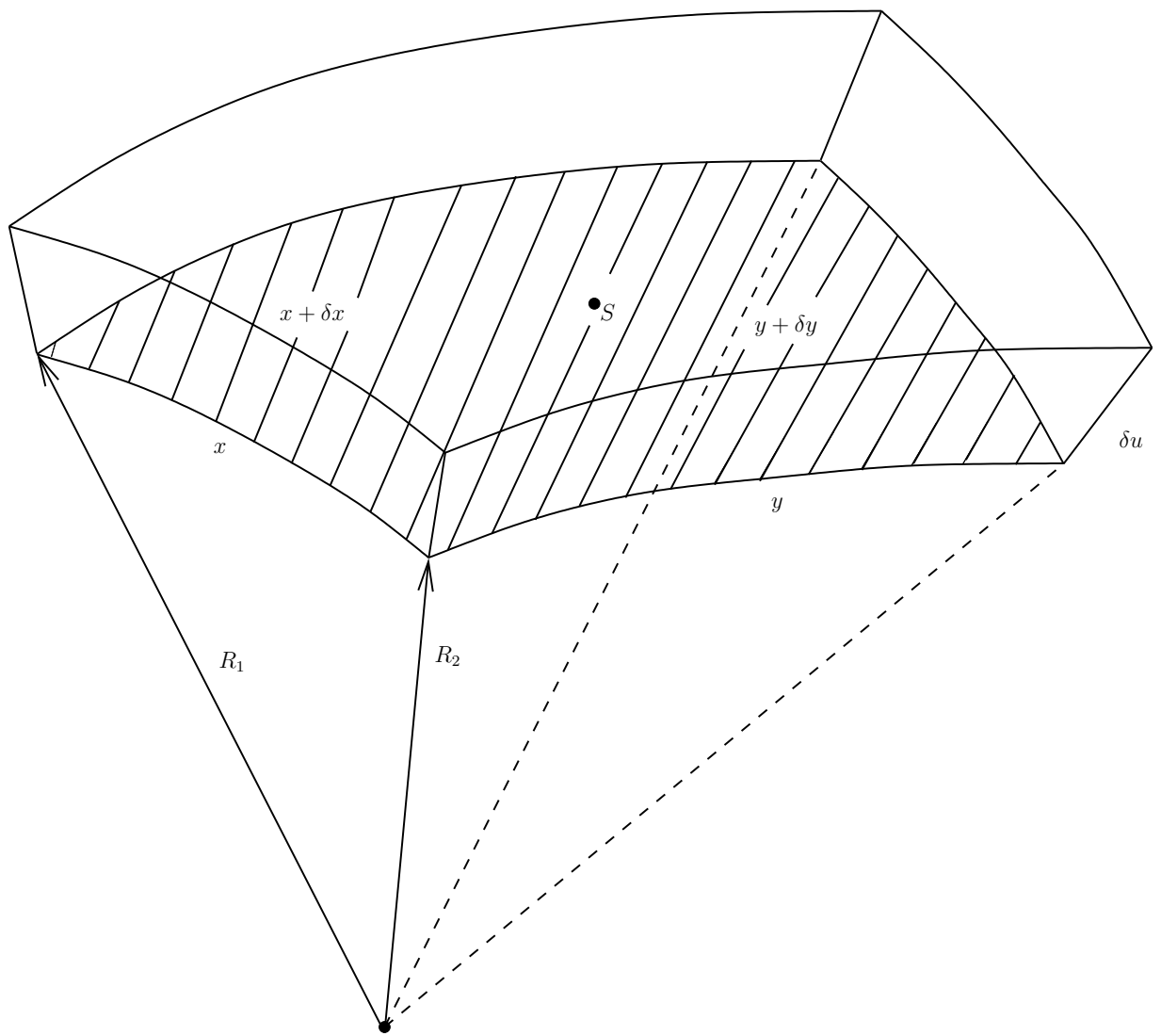


Abbildung 10.3: ??

Variation  $\delta u$ , die virtuelle Arbeit  $\delta W$  leistet. Diese ist

$$\delta W = \underbrace{pS}_{\text{Kraft}} \delta u = pxy\delta u$$

Eine Seifenblase kann dank ihrer Oberflächenspannung  $\sigma$  Arbeit leisten. Die Einheit von  $\sigma$  ist  $[\sigma] = \text{N/m}$ . Wenn sich die Oberfläche der Seifenblase um  $\Delta S$  ändert, wird die Arbeit  $\sigma'\Delta S = 2\sigma\Delta S$  geleistet. Also wird die Oberfläche verkleinert, bis ein Kräftegleichgewicht eintritt.

$$\Delta S = (x + \delta x)(y + \delta y) - xy = x\delta y + y\delta x + \underbrace{\delta x\delta y}_{\approx 0}$$

Die Winkel der beiden „Tortenstücke“ bleiben gleich(?), woraus folgt

$$\frac{x + \delta x}{R_1 + \delta u} = \frac{x}{R_1}$$

und damit

$$\begin{aligned} x + \delta x &= x \left( 1 + \frac{\delta u}{R_1} \right) \Rightarrow \delta x = \frac{\delta u}{R_1} x \\ y + \delta y &= y \left( 1 + \frac{\delta u}{R_2} \right) \Rightarrow \delta y = \frac{\delta u}{R_2} y \end{aligned}$$

Somit haben wir für  $\Delta S$

$$\Delta S = xy \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \delta u$$

Die Gleichgewichtsbedingung  $pS\delta u = pxy\delta u = \sigma'\delta S$  liefert

$$pxy\delta u = \sigma'xy \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \delta u$$

Wenn wir kürzen, erhalten wir die *Laplace-Young-Gleichungen*

$$\boxed{p = \sigma' \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$$

Nun betrachten wir eine kugelförmige Seifenblase mit  $R_1 = R_2 = R$  und zeigen, dass für die Druckdifferenz  $p$

$$p = \frac{2}{R}\sigma'$$

gilt.

**Beweis:**

Wir gehen von folgendem Integral aus

$$2\pi \int_0^{\pi/2} pR \cos \theta R \sin \theta \, d\theta \stackrel{!}{=} 2\pi R\sigma'$$

kürzen und nehmen zwei Substitutionen vor

$$\int_0^{\pi/2} pR \cos \theta \sin \theta \, d\theta = pR \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin \theta}_{=:u} \, d(\underbrace{\sin \theta}_{=:u}) = pR \int_0^1 u \, du = \frac{1}{2}pR = \sigma'$$

Also ist

$$p = \frac{2}{R}\sigma'$$

□

### 10.3 Anwendung auf Wasserwellen

$$\begin{aligned} p_{\text{in}}\delta s &= p_{\text{out}}\delta s + 2\sigma' \sin(\delta\theta/2) \\ \Rightarrow \underbrace{(p_{\text{in}} - p_{\text{out}})}_{=:p} \delta s &= 2\sigma' \sin(\delta\theta/2) \approx \sigma' \delta\theta \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für  $p$

$$p = \frac{\sigma'}{R}$$

weshalb  $R \rightarrow 0$  energetisch ungünstig ist.

Wie im vorigen Kapitel über die lineare Theorie der Wellen wird die Wasseroberfläche durch  $\eta$  parametrisiert. Deren Krümmung ist damit

$$R^{-1} = -\eta'' [1 + (\eta')^2]^{-3/2} \xrightarrow{\eta' \ll 1} -\eta''$$

was für eine Flüssigkeit

$$p = p_f - p_{\text{atm}} = -\sigma \partial_x^2 \eta$$

bedeutet. ( $\sigma'$  (??))

Damit formen wir nun unsere drei linearisierten Randbedingungen (9.4), (9.5) und (9.6) aus dem vorigen Kapitel um. Aus der dynamischen Randbedingung wird

$$\partial_t \varphi + gy - \frac{\sigma}{\rho} \partial_x^2 \eta = 0|_{y=\eta(x,t)} \quad (10.4)$$

während die kinematische Randbedingung sich nicht ändert

$$\partial_t \varphi = \partial_t \eta|_{y=0}$$

und die Randbedingung für den Boden ebenfalls unberührt bleibt.

$$\partial_y \varphi = 0|_{y=-h}$$



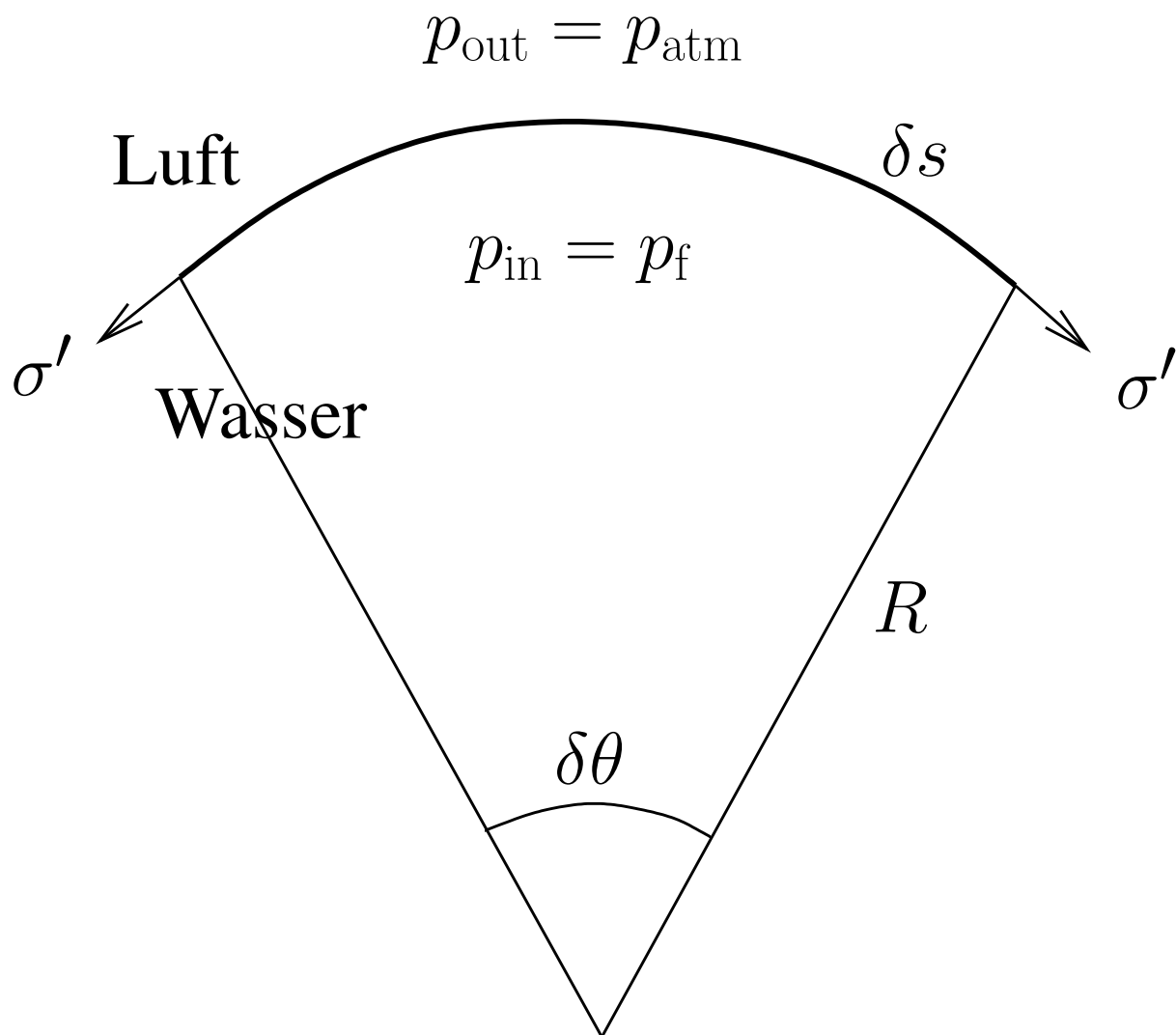


Abbildung 10.4: ??

Die Ableitung nach der Zeit von (10.4) liefert

$$\partial_t^2 \varphi + g \partial_y \varphi - \frac{\sigma}{\rho} \partial_y \partial_x^2 \varphi = 0|_{y=\eta(x,t)}$$

und da noch immer die Laplace-Gleichung

$$\Delta \varphi = \partial_x^2 \varphi + \partial_y^2 \varphi = 0$$

gilt, ergibt sich für (10.4)

$$\partial_t^2 \varphi + g \partial_y \varphi - \frac{\sigma}{\rho} \partial_y^3 \varphi = 0|_{y=\eta(x,t)} \quad (10.5)$$

Für die Lösung nutzen wir die Laplace-Gleichung und setzen

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = F(x - ct)Y(y)$$

Mit der Randbedingung für den Boden (9.4) können wir gleich

$$Y(y) = \cosh[k(y + x)]$$

hinschreiben, während wir für  $F(x - ct)$

$$F(x - ct) = A \cos[k(x - ct)] + B \sin[k(x - ct)]$$

ansetzen. Wenn wir

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = [A \cos[k(x - ct)] + B \sin[k(x - ct)]] \cosh[k(y + x)]$$

in (10.5) einsetzen, bekommen wir

$$-\omega^2 \varphi + \left( gk \frac{\sinh(kh)}{\cosh(kh)} + \frac{\sigma}{\rho} k^3 \frac{\sinh(kh)}{\cosh(kh)} \right) \varphi = 0$$

und damit die Dispersionrelation einer linearen Wellen unter Berücksichtigung der Kapillarität

$$\boxed{\omega^2(k) = \left( g + \frac{\sigma k^2}{\rho} \right) k \tanh(kh)}$$

Mit  $\omega = kc$  und  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  bekommen wir

$$c(\lambda) = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma}{g\rho} \right) \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \right] \tanh \frac{2\pi kh}{\lambda}}$$

und mittels Einführung der Kapillarlänge  $l_c$  mit

$$l_c^2 := \frac{\sigma}{g\rho}$$

wird die eckige Klammer zu

$$\left[ 1 + \left( 2\pi \frac{l_c}{\lambda} \right)^2 \right]$$

Daraus folgt, dass für  $\lambda \gg l_c$  Schwerewellen und für  $\lambda \ll l_c$  Kapillarwellen vorliegen. Für Wasser ist  $\sigma = 0.07 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  und  $l_c = 2.6 \text{ mm}$ .

### Tiefes Wasser:

Für tiefes Wasser ist

$$2\pi h \gg \lambda$$

weshalb

$$\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \approx 1$$

gilt und wir bekommen abhängig von  $\lambda$  zwei Fälle

1.  $\lambda \rightarrow 0$

$$c(\lambda) \propto \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \rightarrow \infty$$

2.  $\lambda \rightarrow \infty$

$$c(\lambda) \propto \sqrt{\lambda} \rightarrow \infty$$

Wo ist die minimale Geschwindigkeit? Wir betrachten  $c^2(\lambda)$  genauer:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &:= \lambda \left[ 1 + \left( 2\pi \frac{l_c}{\lambda} \right)^2 \right] \\ \Rightarrow f'(\lambda) &= \left[ 1 + \left( 2\pi \frac{l_c}{\lambda} \right)^2 \right] - 2\lambda (2\pi)^2 \frac{l_c^2}{\lambda^3} \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow 1 - \left( 1 - 2\pi \frac{l_c}{\lambda} \right)^2 &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Und damit ist

$$\lambda_{\min} = 2\pi l_c$$

Für Wasser ist  $\lambda_{\min} = 1.63 \text{ cm}$  und  $c_{\min} = 22.3 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ . Unsere Ergebnisse können in folgendem Diagramm zusammengefasst werden: **Gruppengeschwindigkeit:**

Die Gruppengeschwindigkeit ist

$$c_g(\lambda) = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} = c - \frac{\lambda}{2c} \frac{dc^2}{d\lambda} = c \left( 1 - \frac{\lambda}{2c^2} \frac{dc^2}{d\lambda} \right) = c \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 - \lambda_{\min}^2}{\lambda^2 + \lambda_{\min}^2} \right)$$

Wir unterscheiden wieder zwei Fälle

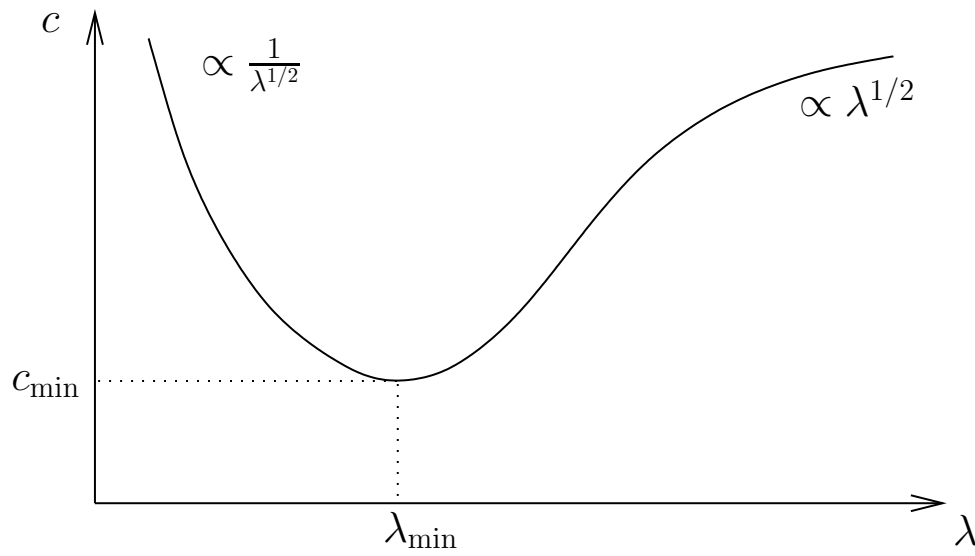


Abbildung 10.5: ??

1. Kapillarwellen

$$\lambda \ll \lambda_{\min} \Rightarrow c_g = \frac{3}{2}c$$

2. Schwerewellen

$$\lambda \gg \lambda_{\min} \Rightarrow c_g = \frac{1}{2}c$$

# Kapitel 11

## Grenzschicht-Theorie

Flüssigkeiten und Gase, deren Zähigkeit klein ist, verhalten sich in vieler Hinsicht *wie ideale Flüssigkeiten* - nur am Rande nicht, wo sich die Reibung wesentlich bemerkbar macht. Das legt folgende Idee nahe: Außerhalb einer Schicht  $\delta$ , die noch zu bestimmen ist, typischerweise einen Wert von  $\delta \approx Re^{-1/2}$  annimmt und somit dünn für  $Re = \rho LV/\mu \gg 1$  ist, haben wir es mit einer Potentialströmung zu tun, in der, wie oben schon behandelt wurde, gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0 .$$

Deswegen gibt es ein Potential  $\varphi$  mit

$$\operatorname{grad} \varphi = \mathbf{v} \quad \text{und} \quad \Delta \varphi = 0 .$$

Die Frage, die wir jetzt behandeln wollen, lautet: Was passiert in dieser *Grenzschicht* und warum?

Wir setzen wieder Navier-Stokes für inkompressible Flüssigkeiten an:

$$D_t \mathbf{v} = -\rho^{-1} \nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} .$$

Wegen der Inkompressibilität haben wir bekanntlich  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , desweiteren die Randbedingung  $\mathbf{v}|_{\partial \mathbb{B}} = 0$ .

Für unendlich hohe Reynolds-Zahlen  $Re := \infty$  und wenn das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}$  parallel zum Rand des Gebiets  $\mathbb{B}$  ist, d.h.  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial \mathbb{B}} = 0$ , wobei  $\mathbf{n}$  der Normalenvektor am Rand von  $\mathbb{B}$  ist, gehen die Navier-Stokes-Gleichungen in die Euler-Gleichungen über:

$$D_t \mathbf{v} = -\rho^{-1} \nabla p .$$

Außerdem haben wir noch das Wirbelfeld  $\boldsymbol{\omega} := \rho^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{v}$ , welches folgender Gleichung gehorcht:

$$D_t \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} .$$

Wir wollen nun den folgenden drei Punkten jeweils einen Abschnitt widmen:

1. Die Euler-Strömung wird nur in einer Grenzschicht der Dicke  $\propto Re^{-1/2}$  drastisch wegen der Viskosität modifiziert.
2. Der Fluss kann sich dabei von der Wand trennen.
3. Die nicht glatte Wand kann Wirbel erzeugen.

## 11.1 Die Existenz einer Grenzschicht

Motiviert von einigen Beispielen.

1. Wir betrachten das Anfangswertproblem mit  $a = const$

$$\frac{dy}{dx} = a, \quad y(1) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Die Lösung ist

$$y(x) = a(x - 1) + 1 = ax + (1 - a)$$

Nun kommt eine Art Viskositätsterm hinzu:

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = a, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

Die Lösung ist nun

$$y(x) = \frac{1 - a}{1 - e^{-1/\varepsilon}} (1 - e^{-x/\varepsilon}) + ax$$

und ist in Abb. 11.1 zu sehen.

2. Eine *stationäre* 2D Strömung oberhalb von einer Platte  $\{y; y = 0\}$ , wo  $\mathbf{v} = 0$  ist, während

$$\mathbf{v} = (u(y, t), 0) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} (U, 0)$$

Die Navier-Stokes-Gleichungen samt Kontinuitätsgleichung und Randbedingungen für eine allgemeine zweidimensionale Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = (u, v)$  lauten

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u &= -\partial_x p + \frac{1}{Re} \Delta u \\ \partial_t v + u \partial_x v + v \partial_y v &= -\partial_y p + \frac{1}{Re} \Delta v \\ \partial_x u + \partial_y v &= \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ u = v = 0 &|_{\partial \mathbb{B}} \end{aligned}$$

Von der Kontinuitätsgleichung bleibt, da wir  $v = 0$  voraussetzen,  $\partial_x u = 0$  übrig und wenn eine Strömung mit konstantem Druck ( $\nabla p = 0$ ) vorliegt, erhalten wir ( $\nu := \frac{1}{Re}$ )

$$\partial_t u = \nu \partial_y^2 u \tag{11.1}$$

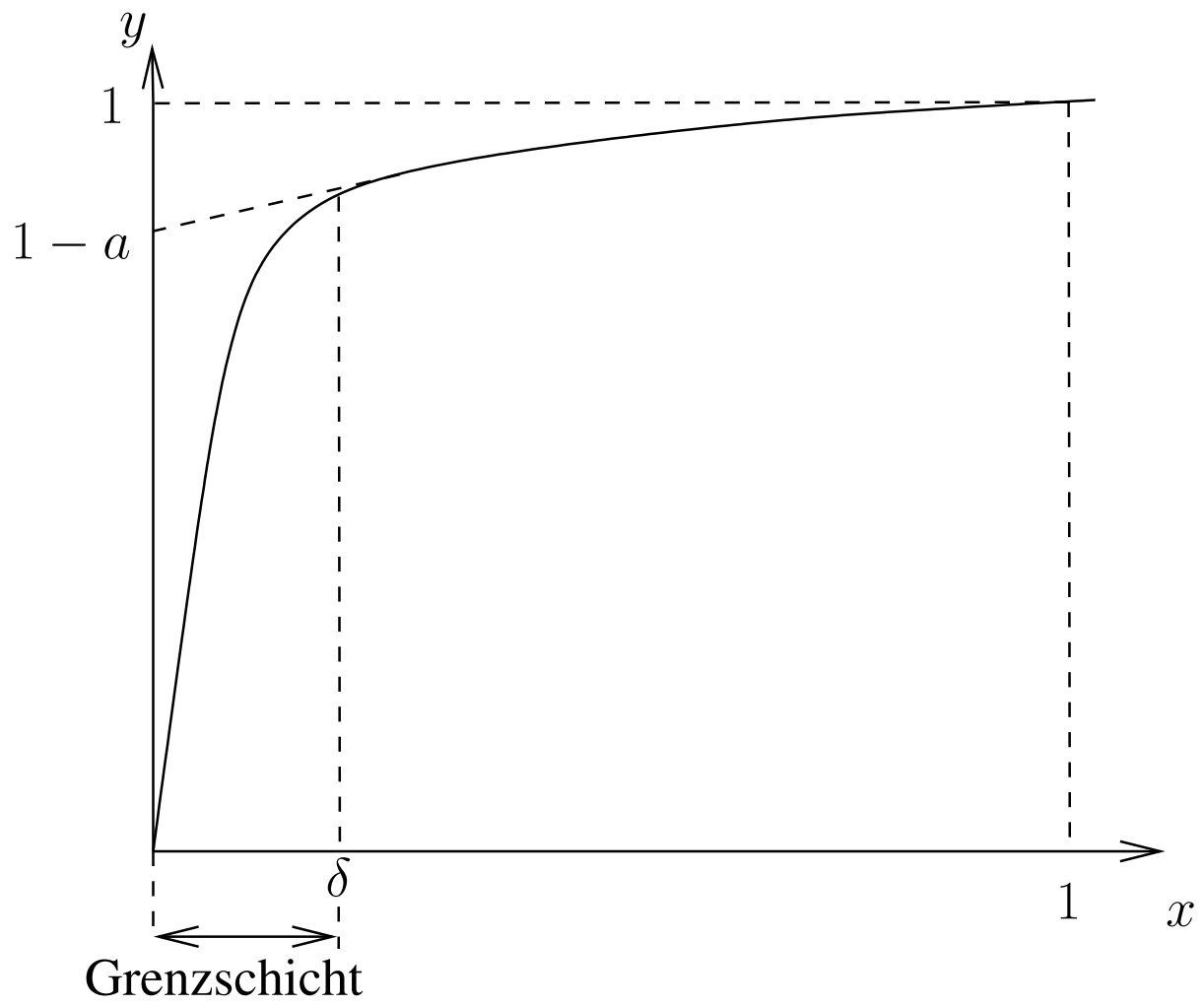


Abbildung 11.1: ??

Jetzt kommt ein smartes *Skalierungs-Argument*, mit dem eine Variable eliminiert wird. Seien  $L$  und  $T$  Länge- und Zeitskalen, sowie  $y' := y/L$  und  $t' := t/T$ , so dass

$$\partial_{t'} u = \frac{\nu T}{L^2} \partial_{y'}^2 u \quad (11.2)$$

Falls  $L^2/T = 1$ , sind die Gleichungen (11.1) und (11.2), sowie die Randbedingungen *identisch*. Da die Lösungen eindeutig sind, muss

$$u\left(\frac{y}{L}, \frac{t}{T}\right) = u(y, t), \quad L^2 = T$$

Wir setzen  $T := t \Rightarrow L = \sqrt{t}$  und bekommen

$$u(y, t) = u\left(\frac{y}{\sqrt{t}}, 1\right)$$

Wir definieren  $\eta := y/2\sqrt{\nu t}$  und schreiben

$$\begin{aligned} u(y, t) &= u\left(\frac{y}{\sqrt{t}}, 1\right) = U f(\eta) \\ \stackrel{(11.1)}{\Rightarrow} f'' + 2\eta f' &= 0 \quad f(\infty) = 1 \quad f(0) = 0 \\ \Rightarrow f(\eta) &= C e^{-\eta^2} . \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung der Differentialgleichung

$$\boxed{u(y, t) = U \operatorname{erf}\left(\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)}$$

mit

$$\operatorname{erf}(\eta) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-s^2} ds ,$$

der „error function“, für die

$$\operatorname{erf}(0) = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{erf}(\infty) = 1$$

gilt. Präziser gefasst ist  $\operatorname{erf}(1) = 0.84$  und  $\operatorname{erf}(1.5) = 0.97$ . Wir definieren die Grenzschicht der Dicke

$$\delta = \sqrt{\nu t} =: \sqrt{t/Re}$$

und haben so eine Näherungsformel für die Dicke der Grenzschicht hergeleitet:

$$\boxed{\delta \propto Re^{-1/2}}$$



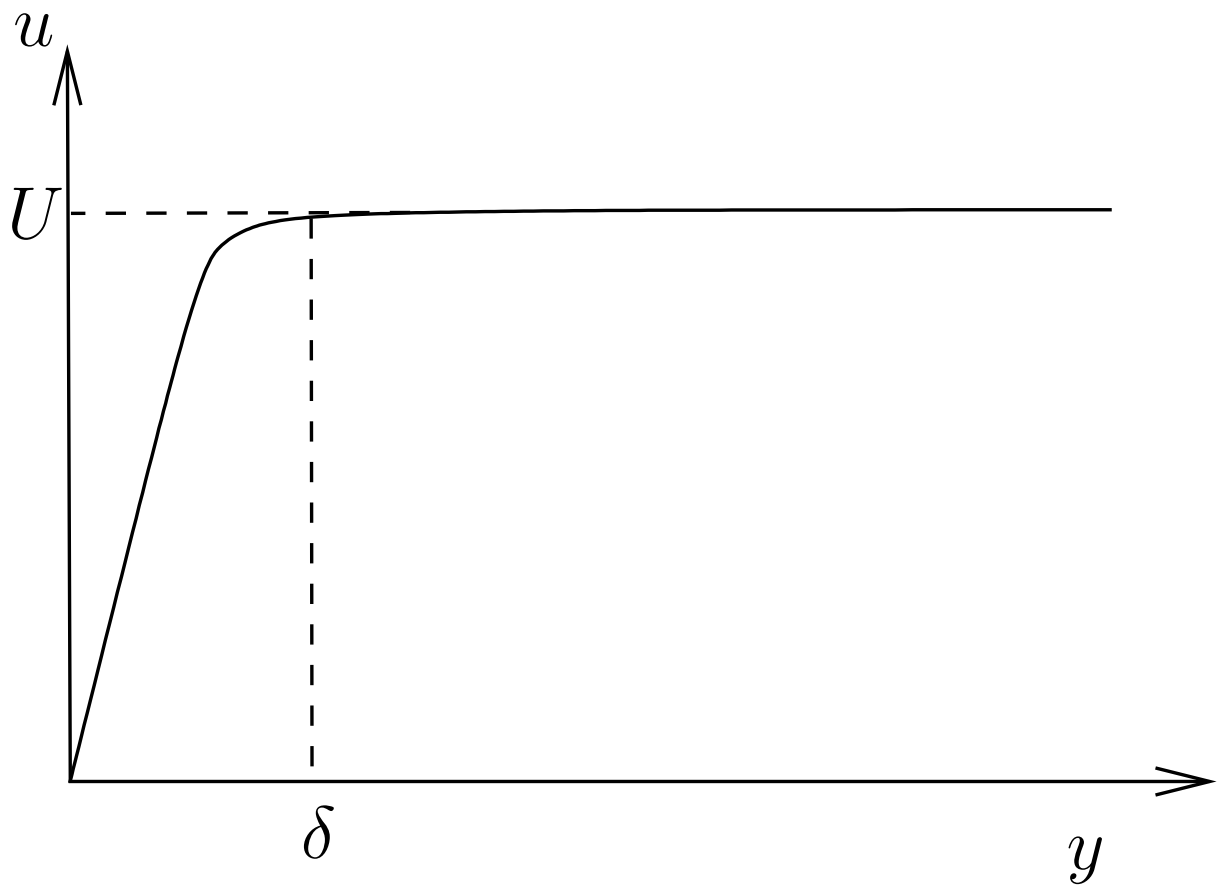


Abbildung 11.2: ??

## 11.2 Lösen der Grenzschicht vom Rand

Wegen der Reibung können bei einer gekrümmten Oberfläche die Stromlinien „davonlaufen“. Prandtl wusste das schon und hat im Jahre 1904 seine Gleichungen für die Schicht eingeführt.

## 11.3 Grenzschichten erzeugen Wirbel

Wir integrieren  $\mathbf{v}$  an der Grenzschicht über einen rechteckigen Weg  $ABCD$  (siehe Abb. 11.3)

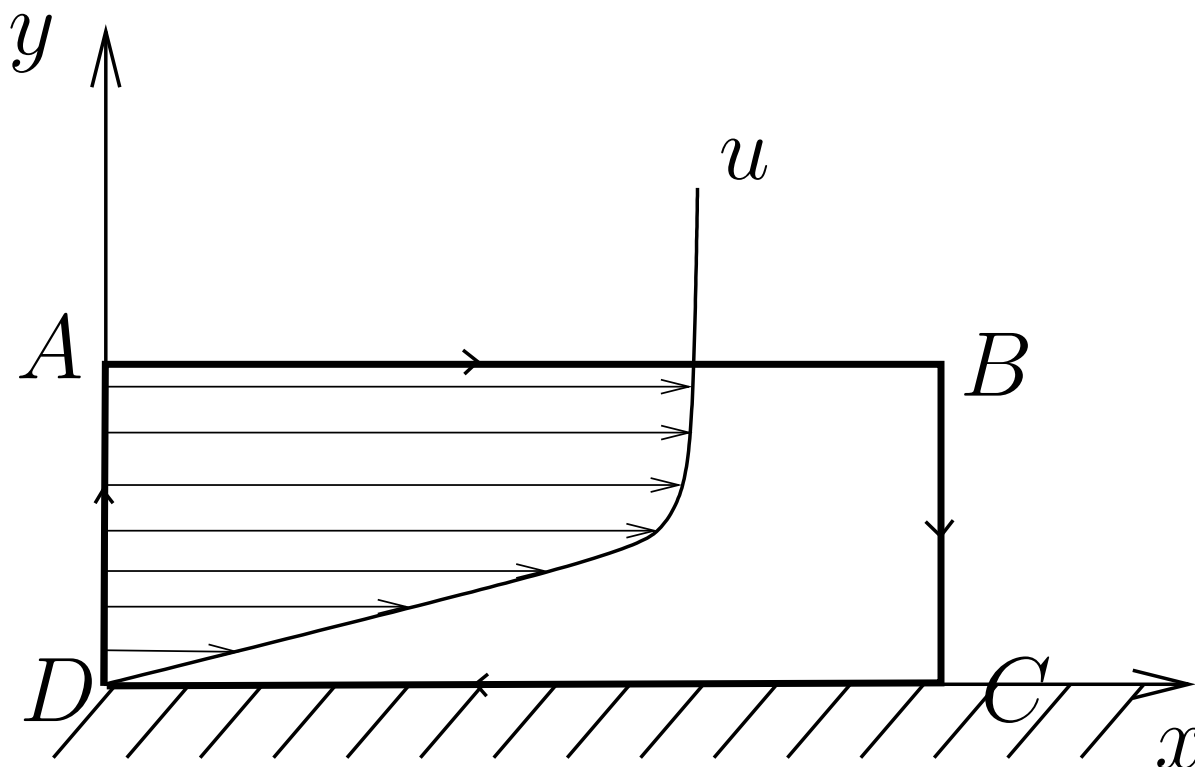


Abbildung 11.3: ??

$$\oint_{ABCD} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_{DA} v dy + \int_{AB} u dx - \int_{BC} v dy - \int_{CD} u dx$$

Da  $\text{div} \mathbf{v} = 0$  und auf der Strecke  $CD$   $u = v = 0$  gilt, muss  $v$  wohl klein sein. Deswegen nehmen wir an, dass

$$v \ll u|_{AB}$$

so dass

$$\oint_{ABCD} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \approx \int_{AB} u dx > 0$$

Das heißt, der Rand erzeugt bei den Navier-Stokes-Gleichungen Wirbel, aber nicht bei den Euler-Gleichungen, da dort  $u \neq 0$  am Rand möglich ist.

## 11.4 Herleitung der Prandtl-Gleichungen

Wir werden nun die Prandtl-Gleichungen herleiten. Dazu werden die verschiedenen Terme abgeschätzt.

Wir definieren

$$y' := \frac{y}{\delta}$$

weshalb innerhalb der Grenzschicht

$$0 < y' < 1$$

gelten muss. Sobald  $y$  größer als die Dicke der Grenzschicht wird, also  $y' \geq 1$  gilt, sei  $u = \mathcal{O}(1)$ .

$v$  ist da noch immer klein, wegen

$$v(x, y) = \underbrace{v(x, 0)}_{=0} + y \partial_y v = y \underbrace{\partial_y v}_{\mathcal{O}(\delta)} \underset{=-\partial_x u = \mathcal{O}(1)}{\quad}$$

Somit ergibt sich

$$x' = x \quad y' = \frac{y}{\delta} \quad t' = t$$

woraus folgt

$$u' = u \quad v' = \frac{v}{\delta} \quad p' = p$$

und damit erscheinen die Navier-Stokes-Gleichungen (11.1) in neuem Glanze

$$\begin{aligned} \partial_{t'} u' + u' \partial_{x'} u' + v' \partial_{y'} u' &= -\partial_{x'} p' + \frac{1}{Re} (\partial_{x'}^2 u' + \delta^{-2} \partial_{y'}^2 u') \\ \delta \partial_{t'} v' + \delta u' \partial_{x'} v' + \delta v' \partial_{y'} v' &= -\delta^{-1} \partial_{y'} p' + \frac{1}{Re} \left( \delta \partial_{x'}^2 v' + \frac{\delta}{\delta^2} \partial_{y'}^2 v' \right) \\ \partial_{x'} u' + \partial_{y'} v' &= 0 \\ u' = v' &= 0|_{\partial B} \end{aligned}$$

Nur die größten Terme werden für die Grenzschicht beibehalten und die viskosen Terme spielen *nur dort* eine Rolle. Da, wie vorher gezeigt,

$$Re \delta^2 = \mathcal{O}(1)$$

ist, können wir die Terme mittels

$$Re\delta \gg 1$$

abschätzen. Es bleibt

$$\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u = -\partial_x p + \frac{1}{Re}\partial_y^2 u$$

$$\partial_y p = 0$$

$$\partial_x u + \partial_y v = 0$$

$$u = v = 0|_{\partial\mathbb{B}}$$

Dies sind die Prandtl-Gleichungen, die 1904 veröffentlicht wurden.

Man sollte erwarten, dass ein  $\alpha$  existiert, so dass

$$\|\mathbf{v}(x, y, t) - \mathbf{v}_p(x, y, t)\| \leq \frac{const}{Re^\alpha}$$

für  $0 \leq y \leq \delta$  und  $Re \rightarrow \infty$  gilt.  $\mathbf{v}$  ist hier die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen und  $\mathbf{v}_p$  die Lösung der Prandtl-Gleichungen. Beweise dafür gibt es allerdings kaum. Außerdem sollte die Lösung der Prandtl-Gleichungen am Rande der Grenzschicht „vernünftig“ mit der Lösung der Euler-Gleichungen zusammenpassen.

Für den Wirbel

$$\xi = \underbrace{\partial_x v - \partial_y u}_{\text{zu vernachlässigen}} = -\partial_y u = -\partial_n u|_C \stackrel{!}{=} 0$$

sollte auch ein *Ablösepunkt*  $C$  definiert sein. Dies gehört aber leider ebenfalls in die Kategorie „well-educated-guess“.

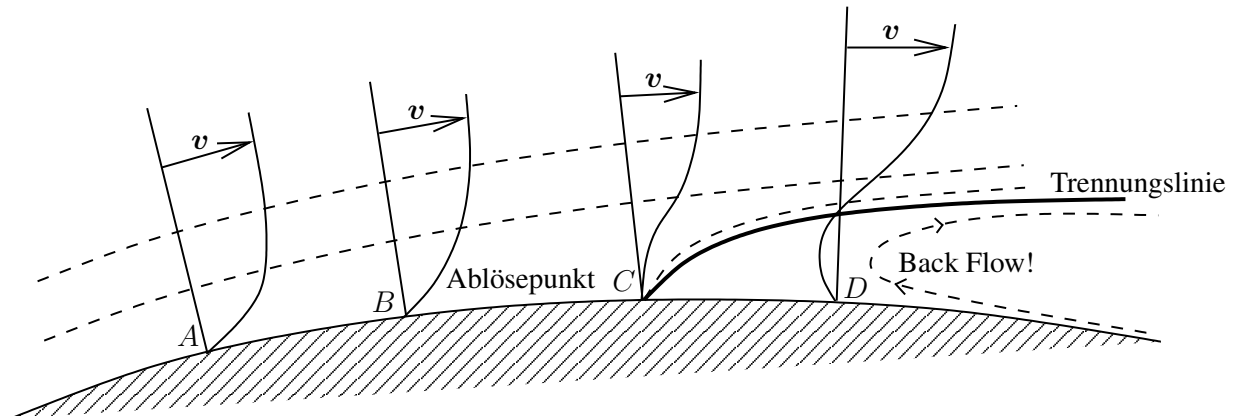


Abbildung 11.4: ??

## 11.5 Beispiel einer Lösung der Prandtl-Gleichungen

# Kapitel 12

## Die konforme Abbildung in der 2d-Flüssigkeitsdynamik und Auftrieb von Tragflächen

Wir sind dem komplexen Potential  $W = \varphi + i\psi$  schon öfter begegnet, und zwar für eine wirbelfreie zweidimensionale Strömung in der  $z$ -Ebene. Wir taufen  $W$  in  $w$  um, so dass wir  $w = \varphi + i\psi$  haben und betrachten nun die *analytische* Funktion  $Z = f(z)$  und deren ebenfalls analytische Umkehrfunktion  $z = F(Z)$ ,

$$W(Z) = w(\underbrace{F(Z)}_{=z})$$

für  $Z = X + iY$ . Außerdem ist

$$W(Z) = \phi(X, Y) + i\Psi(X, Y)$$

wobei  $\phi$  und  $\Psi$  wieder Cauchy-Riemann gehorchen und deshalb sind

$$u_*(X, Y) = \partial_X \phi = \partial_Y \Psi$$

$$v_*(X, Y) = \partial_Y \phi = -\partial_X \Psi$$

die Geschwindigkeitskomponenten einer wirbelfreien inkompressiblen Stömung in der  $Z$ -Ebene.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass wir nun zwei komplexe Ebenen betrachten, wobei die eine mit der Variablen  $z$ , die andere mit  $Z$  beschrieben wird; dieselbe Konvention gilt ebenso für die Potentiale. Von der einen komplexen Ebene zur anderen gelangen wir über die analytischen (und wie wir gleich sehen werden, konformen) Abbildungen

$$z = F(Z) \quad \text{und} \quad Z = f(z) .$$

Die Geschwindigkeitskomponenten in der  $Z$ -Ebene werden mit einem Stern gekennzeichnet.

## 12.1 Konforme Abbildungen

Weil  $W(Z) = w(z)$  ist, nehmen sie in korespondierenden Punkten gleiche Werte an, die Real- und Imaginärteile stimmen auch überein, weshalb die Stromlinien eins zu eins aufeinander abgebildet werden. Die Frage ist nun, ob wir statt des runden Zylinders mit der analytischen (!) Funktion  $f$  eine *flügelähnliche* Form bekommen können. Dabei muss wohl dank des Kutta-Joukowski-Theorems  $\Gamma_C \neq 0$  sein.

Was im Unendlichen passiert, ist ebenfalls wichtig, wie wir in extenso gesehen haben. Also

$$u_* - iv_* = \frac{dW(z)}{dZ} = \frac{dw(\overbrace{F(Z)}^{=z})}{dZ} = \frac{dw/dz}{dZ/dz} = \frac{u - iv}{f'(z)}$$

Wenn wir z.B. einen gleichmäßigen Fluss um ein Objekt herum auf einen anderen ebenfalls gleichmäßigen Fluss um ein anderes Objekt herum abbilden möchten, sollte

$$f'(z) \underset{|z| \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 1$$

Warum heißt die obige Abbildung *konform*? Sei

$$z_0 \rightarrow Z_0 = f(z_0)$$

und es existiere eine natürliche Zahl  $n$ , so dass für die  $n$ -te Ableitung gelte

$$f^{(n)}(z)|_{z=z_0} \neq 0$$

In der Regel ist  $n = 1$ , aber auch  $n \geq 2$  kann vorkommen. Damit ergibt sich mit einer Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} \delta Z &= \frac{(\delta z)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + \mathcal{O}(\delta z)^{n+1} \\ \Rightarrow \arg(\delta Z) &= n \arg(\delta z) + \arg[f^{(n)}(z_0)] \end{aligned}$$

Dann folgt für die beiden Funktionen  $Z_1$  und  $Z_2$

$$\arg(\delta Z_2) - \arg(\delta Z_1) = n[\arg(\delta z_2) - \arg(\delta z_1)]$$

Für  $n = 1$  sind die Differenzen der Argumente *gleich* und die Abbildung ist somit *winkeltreu*, mit anderen Worten, konform.

## 12.2 Die Joukowski-Transformation

Die Joukowski-Transformation sieht folgendermaßen aus

$$Z = z + \frac{c^2}{z} =: f(z),$$

mit  $f'(\pm c) = 0$ , aber  $f''(\pm c) \neq 0$ , so dass der Winkel  $\alpha$  zwischen zwei Liniensegmenten nur bei  $\pm c$  auf den Winkel  $2\alpha$  abgebildet wird. Die inverse Transformation ist

$$z = \frac{1}{2}Z + \left(\frac{1}{4}Z^2 - c^2\right)^{1/2} =: F(Z) \quad (12.1)$$

Für  $|Z| \rightarrow \infty$  wird aus der (positiven) Wurzel

$$\left(\frac{1}{4}Z^2 - c^2\right)^{1/2} \rightarrow \frac{1}{2}Z$$

so dass im Unendlichen  $Z \approx z$  gilt. Wir betrachten nun den Effekt der Joukowski-Transformation auf den Kreis

$$\{z; |z| = a\} \text{ bzw. } \{z = a e^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

mit  $0 \leq c \leq a$ . Die Abbildung des Kreises ist

$$X + iY = \left(a + \frac{c^2}{a}\right) \cos \theta + i \left(a - \frac{c^2}{a}\right) \sin \theta$$

Daraus folgt

$$\cos \theta = X \left(a + \frac{c^2}{a}\right)^{-1} \quad \text{und} \quad \sin \theta = Y \left(a - \frac{c^2}{a}\right)^{-1}$$

Mit  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  folgt

$$\frac{X^2}{\left(a + c^2/a\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(a - c^2/a\right)^2} = 1 \quad (12.2)$$

Wir haben nun also eine Ellipse in der  $Z$ -Ebene. Diese sieht schon etwas mehr nach einem Flügel aus ... Entscheidend sind die verschiedenen Vorzeichen der beiden Halbachsen.

Kehren wir nun zum Strom zurück, der mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\alpha$  bilde. Damit haben wir das Potential  $Uz e^{-i\alpha}$ . Wir addieren einen Wirbel der Stärke  $\Gamma$  dazu und wenden das Kreis-Theorem von Milne-Thomson an und erhalten eine Strömung um den Zylinder  $\{z; |z| = a\}$

$$w(z) = U \left( z e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{z} e^{i\alpha} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$$

Wir setzen (12.1) in diese Gleichung ein und erhalten

$$W(Z) = w(F(Z)) = U \left( \left[ \frac{1}{2}Z + \left(\frac{1}{4}Z^2 - c^2\right)^{1/2} \right] e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{\left[ \frac{1}{2}Z + \left(\frac{1}{4}Z^2 - c^2\right)^{1/2} \right]} e^{i\alpha} \right)$$

$$-\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left[ \frac{1}{2}Z + \left( \frac{1}{4}Z^2 - c^2 \right)^{1/2} \right]$$

Wir betrachten nun den Fall, dass  $c$  gegen  $a$  geht, so dass die zweite Hauptachse  $(a - c^2/a)$  der Ellipse (12.2) gegen null und die erste  $(a + c^2/a)$  gegen  $2a$  konvergiert und eine „dünne Platte“ übrig bleibt. Außerdem

$$u_* - iv_* = \frac{dW}{dZ} = \frac{dw/dz}{dZ/dz} = \left( U e^{-i\alpha} - U e^{i\alpha} \frac{a^2}{z^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi z} \right) / \left( 1 - \frac{a^2}{z^2} \right) \quad (12.3)$$

Diesen Ausdruck kann man auch in  $Z$  umschreiben, was aber recht aufwendig und meist nicht nötig ist. An den Punkten  $z = \pm a$  bzw.  $Z = \pm 2a$  bekommen wir eine *Singularität*, da die Geschwindigkeit wegen  $(1 - a^2/z^2)^{-1}$  divergiert. Diese lässt sich in  $Z = a$  nur dann beheben, wenn  $\Gamma$  so *gewählt* wird, dass

$$U (e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} = 0$$

ist, d.h.

$$\boxed{\Gamma = -4\pi U a \sin \alpha}$$

Dies ist die berühmte *Joukowski-Bedingung*. Wenn man  $z = a + \varepsilon$  schreibt, in (12.3) substituiert und den Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  nimmt, erhält man für  $z \rightarrow 2a$

$$u \rightarrow U \cos \alpha \quad \text{und} \quad v \rightarrow 0$$

**Bemerkung:** Die Singularität bei  $z = -a$  bzw.  $Z = -2a$  bleibt. Durch Verschiebung des Kreises um eine Kleinigkeit  $\lambda \ll a$  nach links lässt sich dies beheben und die Joukowski-Bedingung wird zu

$$\boxed{\Gamma = -4\pi U (a + \lambda) \sin \alpha}$$

### Beweis:

Wir wenden die Joukowski-Transformation

$$Z = z + \frac{a^2}{z}$$

jetzt auf den verschobenen Kreis  $\{z = -\lambda + (a + \lambda) e^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  an und erhalten

$$Z = -\lambda + (a + \lambda) e^{i\theta} + \frac{a^2}{-\lambda + (a + \lambda) e^{i\theta}}$$

Das zum obigen Kreis gehörige  $w(z)$  lautet

$$w(z) = U \left[ (z + \lambda) e^{-i\alpha} + \frac{(a + \lambda)^2}{z + \lambda} e^{i\alpha} \right] + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z + \lambda)$$



Hier substituieren wir

$$z = \frac{1}{2}Z + \left(\frac{1}{4}Z^2 - a^2\right)^{1/2}$$

und erhalten

$$u - iv = \frac{dW}{dZ} = \left\{ U \left[ e^{-i\alpha} - \left(\frac{a+\lambda}{z+\lambda}\right)^2 e^{i\alpha} \right] - \frac{i\Gamma}{2\pi(z+\lambda)} \right\} / \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)$$

Die Singularität bei  $z = -a$  kann es nicht mehr geben, es bleibt also nur eine Singularität bei  $z = a$  und somit schreiben wir die Joukowski-Bedingung wie folgt um,

$$U (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) - \frac{i\Gamma}{2\pi(a+\lambda)} = 0.$$

Dies ist nichts anderes als unsere Behauptung  $\Gamma = -4\pi U(a+\lambda) \sin \alpha$ .  $\square$

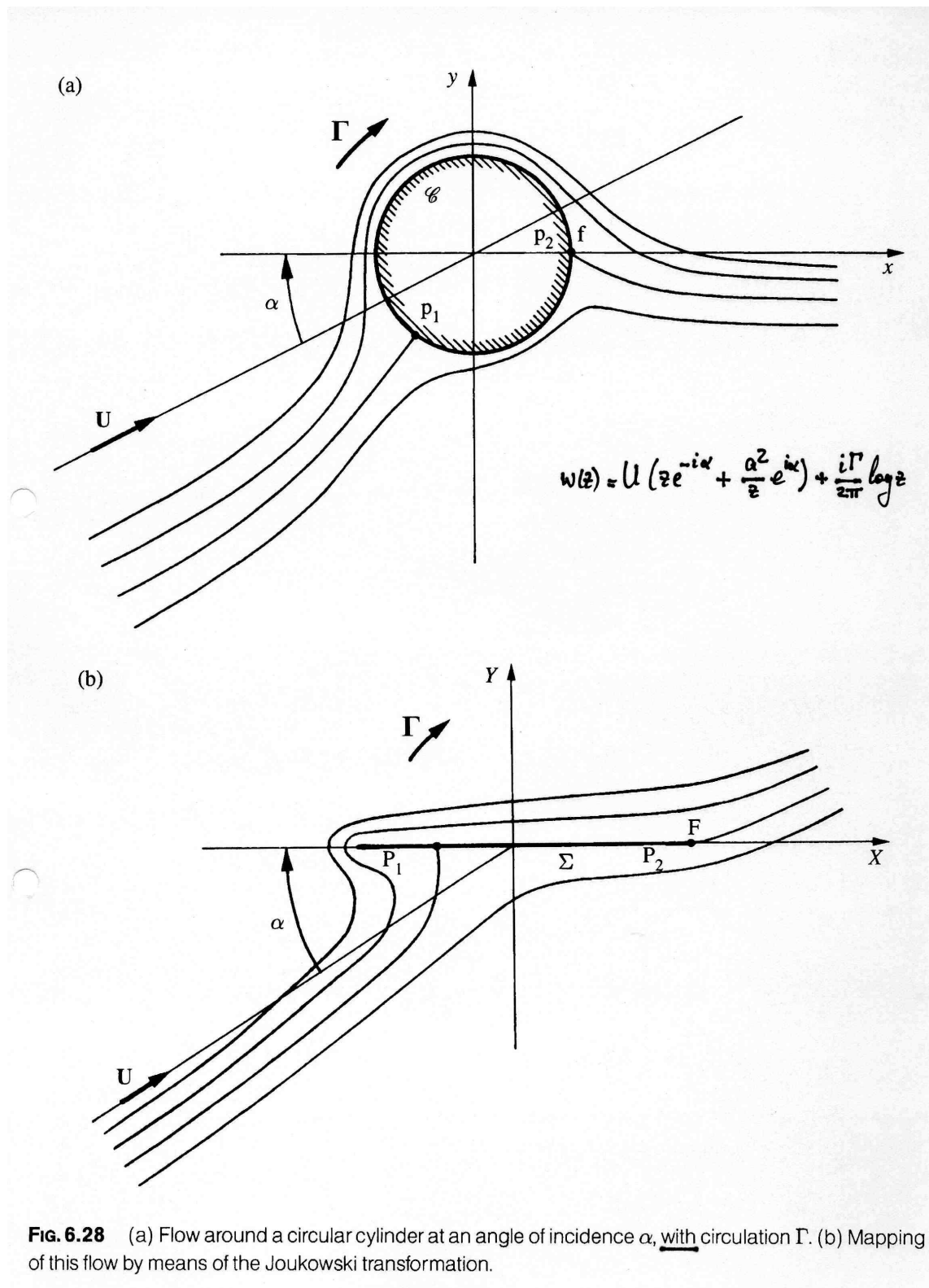
Nach dem Kutta-Joukowski-Theorem gibt es somit einen *Auftrieb*

$$\mathbf{F} = 4\pi\rho U^2(a+\lambda) \sin \alpha \mathbf{n} \quad (12.4)$$

pro Längeneinheit in drei Dimensionen.

Boeing 747: Takeoff-Geschwindigkeit ist 300 km/h,  $\alpha = 10^\circ$ , Flügelbreite  $l = 4a = 9$  m, die totale Flügellänge  $L = 60$  m, somit  $F = 3 \times 10^7$  N.

Cessna: Takeoff-Geschwindigkeit ist 100 km/h,  $\alpha = 13^\circ$ ,  $l = 1.7$  m,  $L = 9$  m, somit  $F = 10^4$  N.



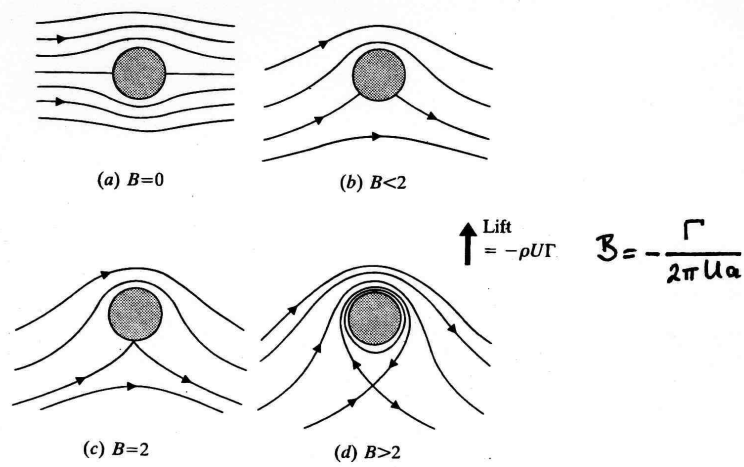


Fig. 4.4. Irrotational flows past a circular cylinder.

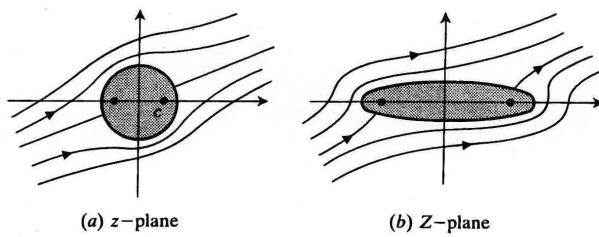


Fig. 4.5. Flow past an elliptical cylinder by conformal mapping; no circulation.

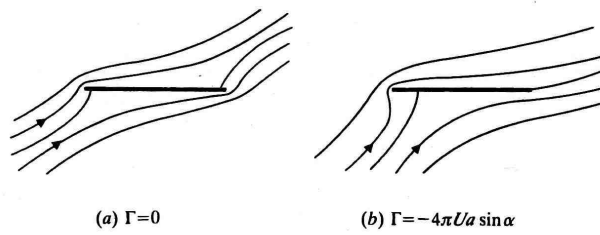


Fig. 4.6. Irrotational flow past a finite flat plate.

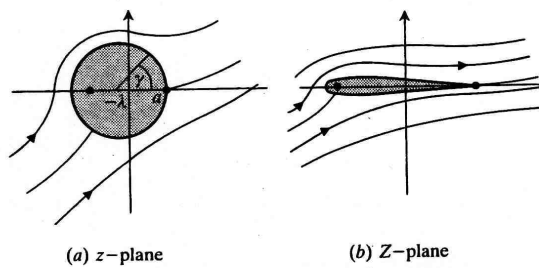


Fig. 4.7. Flow past a symmetric Joukowski aerofoil by conformal mapping.

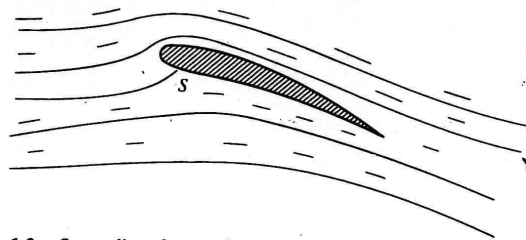


Fig. 1.2. Streamlines for steady flow past a fixed wing, as inferred from a streak photograph.

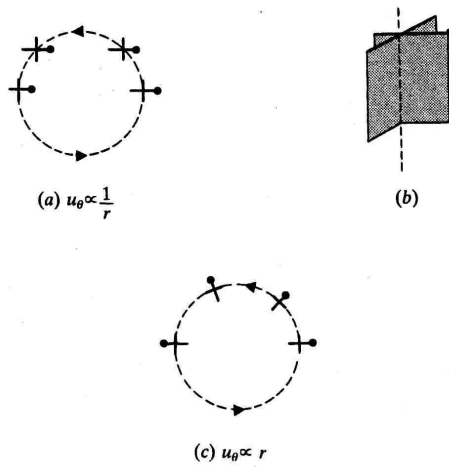


Fig. 1.6. A crude 'vorticity meter' (b), and its behaviour when immersed in a line vortex flow (a) and a uniformly rotating flow (c).

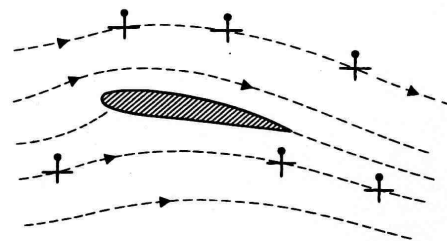


Fig. 1.8. The behaviour of a small 'vorticity meter' placed in the steady flow past a fixed wing at small angle of attack. The flow is clearly irrotational.

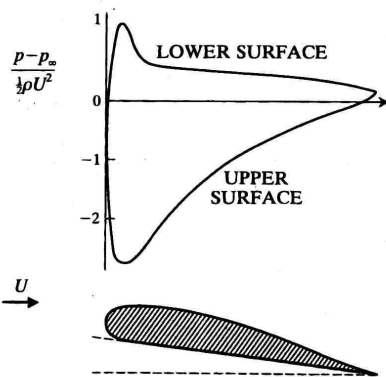


Fig. 1.9. Typical pressure distribution on a wing in steady flow.

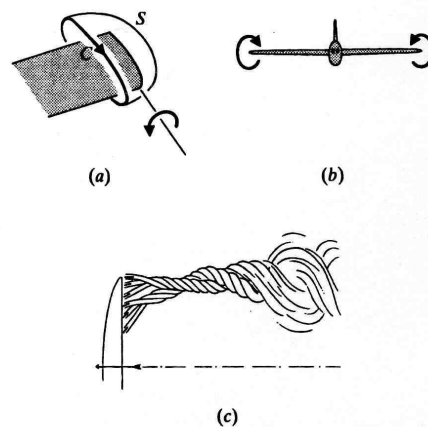


Fig. 1.12. Trailing vortices: (a) definition sketch for application Stokes's theorem; (b) view from some distance ahead of the aircraft; (c) the original drawing from Lanchester's *Aerodynamics* (1907).



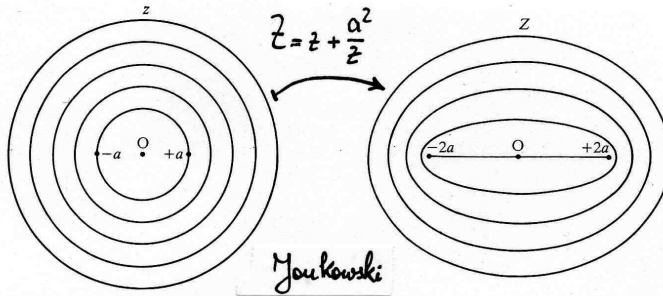


Fig. 64. The special conformal mapping (eqn (395)), used extensively throughout the rest of Chapter 9 and the whole of Chapter 10, maps the outside of the circle of centre the origin and radius  $a$  in the  $z$  plane onto the outside of the strip given by expression (400), which extends from  $Z = -2a$  to  $Z = 2a$ , in the  $Z$  plane. Any circle of larger radius  $c > a$  in the  $z$  plane is mapped onto the ellipse given by expression (399) in the  $Z$  plane.

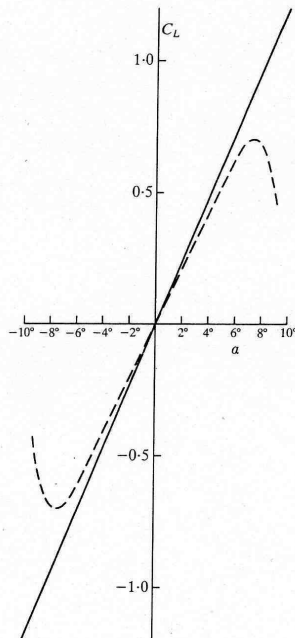


Fig. 77. The lift coefficient  $C_L$  plotted against angle of incidence  $\alpha$  for the symmetrical Zhukovski aerofoil depicted in Fig. 67. The plain line represents irrotational-flow theory, and the broken line represents typical measured values.

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{F} &= -\rho \Gamma_c U \approx \\
 \text{lift [N/m]} \\
 \text{chord } l &\approx 4b
 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned}
 \Gamma_c &= -4\pi U a \sin \alpha \\
 \text{Joukowski condition}
 \end{aligned} \right\} \tilde{F} = 2\pi \underbrace{\left(\frac{\rho U^2}{2} l\right)}_{C_L} \sin \alpha$$



# Kapitel 13

## Stokes' Problem in der Potentialformulierung

### 13.1 Herleitung der Stokes'schen Formel

Zu lösen ist das *lineare* Problem, das wir als Näherung der Navier-Stokes-Gleichungen für hohe Viskositäten und stationäre Geschwindigkeitsfelder erhalten (s.o.):

$$\mu\Delta\mathbf{v} = \nabla p \quad \text{und} \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$$

mit  $\mathbf{v}|_{\partial\mathbb{B}} = 0$ . Da  $\Delta\mathbf{v}$  ein Gradientenfeld ist, gilt

$$\operatorname{rot}\Delta\mathbf{v} = 0$$

Ein sinnvoller Ansatz ist demnach

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi + \mathbf{v}_2 \tag{13.1}$$

mit  $\Delta\mathbf{v}_2 = 0$ . Wir haben nach wie vor die Randbedingung, dass für die Geschwindigkeit im Unendlichen

$$\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U \end{pmatrix}$$

gilt, weswegen wir für  $\mathbf{v}_2$  folgendes ansetzen:

$$\mathbf{v}_2 = g(r)\mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \Delta g(r) = 0$$

Wir wählen

$$g(r) := \frac{b}{r}$$

da  $\Delta\frac{1}{r} = 0$  für  $r \neq 0$  gilt. Damit haben wir den Ansatz für  $\mathbf{v}_2$ :

$$\mathbf{v}_2 = \frac{b}{r}\mathbf{U} \tag{13.2}$$

Wir setzen (13.1) und (13.2) in  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  ein und erhalten

$$\Delta \varphi + \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = \Delta \varphi - b \underbrace{\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}}_{U_z} \frac{1}{r^3} = 0 \quad (13.3)$$

Als nächstes benötigen wir einen Ansatz für  $\varphi$ , nämlich

$$\varphi := f(r) \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}$$

Wir setzen dies in (13.3) ein und bekommen so

$$\Delta \varphi = \left( 4 \frac{f'}{r} + f'' \right) \mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \frac{b}{r^3} \mathbf{U} \cdot \mathbf{x}$$

Wir haben also eine lineare Differentialgleichung zweiten Grades für  $f(r)$ :

$$f'' + \frac{4}{r} f' = \frac{b}{r^3} \quad (13.4)$$

Zuerst lösen wir die homogene Gleichung

$$f'' + \frac{4}{r} f' = 0$$

wofür wir folgendermaßen substituieren:  $h := f'$

$$\Rightarrow h' + \frac{4}{r} h = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{h'}{h} = -\frac{4}{r}$$

Integrieren nach  $r$  liefert

$$\ln h = C' - 4 \ln r \quad \Rightarrow \quad h = \frac{C}{r^4}$$

Durch nochmaliges Integrieren erhalten wir die Lösung der homogenen Gleichung

$$f = A + B \frac{1}{r^3}$$

Die spezielle Lösung finden wir mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten. Wir setzen

$$f_0 = B(r) \frac{1}{r^3}$$

in (13.4) ein und erhalten

$$-B''r + 2B' + br = r \quad \Rightarrow \quad B(r) = -\frac{b}{2} r^2$$

Damit haben wir als allgemeine Lösung von (13.4)

$$f(r) = A + B \cdot \frac{1}{r^3} - \frac{b}{2r} \quad (13.5)$$



Als nächstes setzen wir

$$\nabla\varphi = f(r)\mathbf{U} + f'(r) \cdot \frac{\mathbf{x}}{r}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{x})$$

in (13.1) und (13.2) ein :

$$\mathbf{v} = f(r)\mathbf{U} + f'(r) \cdot \frac{\mathbf{x}}{r}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}) + \frac{b}{r}\mathbf{U} \quad (13.6)$$

Wir nutzen nun die Randbedingung, dass  $\mathbf{v}$  im Unendlichen zu  $\mathbf{U}$  wird, aus.

Da

$$(\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}) \xrightarrow{x_3 \rightarrow \infty} \infty \quad \text{und} \quad \frac{\mathbf{x}}{r} \xrightarrow{x_3 \rightarrow \infty} 1$$

gilt, fordern wir

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} f'(r) = 0$$

Nun zur zweiten Randbedingung  $\mathbf{v}|_{r=a} = 0$

$$\Rightarrow f(a) + \frac{b}{a} = 0 \quad \text{und} \quad f'(a) = 0$$

Wenn wir dieses Ergebnis in (13.5) einsetzen, bekommen wir  $A = 1$ . Auf dieselbe Weise ermitteln wir  $B$ , zuerst  $f'(a) = 0$ :

$$-\frac{3B}{a^4} + \frac{b}{2a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{ba^2}{6}$$

Das setzen wir in

$$f(a) + \frac{b}{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{B}{a^3} - \frac{b}{2a} + \frac{b}{a} = 0$$

ein und erhalten

$$b = -\frac{3}{2}a \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{4}a^3$$

Wir fassen die Ergebnisse zusammen:

$$A = 1 \quad b = -\frac{3}{2}a \quad B = -\frac{1}{4}a^3 \quad f(r) = 1 - \frac{a^3}{4r^3} + \frac{3a}{4r} \quad (13.7)$$

Damit sieht  $\mathbf{v}$  so aus:

$$\mathbf{v} = \mathbf{U} \left( 1 - \frac{a^3}{4r^3} - \frac{3a}{4r} \right) + (\mathbf{U}\mathbf{x}) \frac{3a}{4} \left( \frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \cdot \frac{\mathbf{x}}{r^3} \quad (13.8)$$

Wir setzen unseren Ansatz für  $\mathbf{v}$  aus (13.1) in die Näherung der Navier-Stokes-Gleichung ein:

$$\nabla p = \mu \Delta \mathbf{v} = \mu \nabla \Delta \varphi \quad \Rightarrow \quad p = p_0 + \mu \Delta \varphi$$

Nun wenden wir uns der  $i$ -ten Komponente der Reibungskraft zu und benutzen den wohl-bekanntten Spannungstensor  $M = -p\mathbb{1} + \sigma$  mit

$$M_{ik} = -p\delta_{ik} + \mu(\partial_i v_k + \partial_k v_i) \quad (13.9)$$

$$F_i = \int_{\partial\mathbb{B}} [(-p\mathbb{1} + \sigma)\mathbf{n}]_i d\mathbf{A} = \int_{\partial\mathbb{B}} (M\mathbf{n})_i dA = \int_{\partial\mathbb{B}} \sum_k M_{ik} n_k dA = \int_{\mathbb{B}} \operatorname{div} \mathbf{M}_i d^3x$$

mit

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} M_{i1} \\ M_{i2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \mathbf{M}_i = \sum_k \partial_k M_{ik}$$

$$\sum_k \partial_k M_{ik} = -\partial_i p + \mu \left( \partial_i \sum_k \partial_k v_k + \sum_k \partial_k^2 v_i \right)_{\substack{\uparrow \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0}} = -\partial_i p + \mu \Delta v_i \quad (13.10)$$

Wir setzen

$$p = p_0 + \mu \Delta \varphi$$

und

$$v_i = \partial_i \varphi + \frac{b}{r} U_i$$

in (13.10) ein

$$\sum_k \partial_k M_{ik} = -\mu \partial_i \Delta \varphi + \mu \partial_i \Delta \varphi + b\mu \Delta \left( U_i \frac{1}{r} \right)_{\substack{\uparrow \\ \mathbf{U} = \text{const}}} = b\mu U_i \Delta \frac{1}{r}$$

Mit dem Wissen, dass

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(r)$$

ist (Beweis weiter unten), können wir sofort integrieren

$$F_i = \int_{\mathbb{B}} -4\pi b\mu U_i \delta(r) d^3x = -4\pi b\mu U_i = 6\pi \mu a U_i$$

Und damit sind wir am Ziel

$$\mathbf{F} = 6\pi \mu a \mathbf{U}$$

**Lemma 44**

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(r)$$

**Beweis:**

Für alle  $r \neq 0$  gilt

$$\Delta \frac{1}{r} = 0$$

Bleibt also noch  $r = 0$ . Dazu betrachten wir das Volumenintegral von  $\Delta \frac{1}{r}$  in einer Kugel mit dem Radius  $a$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}} \Delta \frac{1}{r} d^3x & \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial \mathbb{B}} \left( \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{n} dA = \int_{\partial \mathbb{B}} -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{x}}{r} \cdot \mathbf{n} dA = \\ & = \int_{\partial \mathbb{B}} -\frac{1}{r^2} dA = -\frac{1}{a^2} \cdot 4\pi a^2 = -4\pi \end{aligned}$$

□

## 13.2 Zur Güte der Näherung

Wir beginnen mit Navier-Stokes

$$D_t \mathbf{v} = (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}$$

Wenn die Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{\rho U a}{\mu} = \frac{U a}{\nu} \ll 1$$

ist, müssen die Geschwindigkeit und der Radius der Kugel klein, die Viskosität hingegen groß sein.

Wir haben also im vorigen Abschnitt

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \ll \nu \Delta \mathbf{v}$$

geschrieben und damit die Gleichungen

$$\nabla p = \nu \Delta \mathbf{v} \quad \text{div} \mathbf{v} = 0 \quad \mathbf{v}|_{\partial \mathbb{B}} = 0$$

bekommen. An dieser Stelle überprüfen wir, ob die Näherungen gerechtfertigt sind.

Wir betrachten die exakte Lösung (13.8) der obigen Gleichungen für

$$x_3 \gg a \quad \text{und} \quad x_1 = x_2 = 0$$

und bekommen

$$v_3 \approx U \left( 1 - \frac{3a}{4r} \right) + (Ur) \frac{3a}{4} (-1) \frac{r}{r^3} = U - \frac{3aU}{2r}$$

Damit folgt für  $\|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}\|$

$$\|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}\| = |v_3 \partial_3 v_3| \approx v_3 \frac{3}{2} a U \frac{1}{r^2} \approx \frac{3aU^2}{2} \frac{1}{r^2}$$

und für  $\nu\|\Delta\mathbf{v}\|$

$$\nu\|\Delta\mathbf{v}\| = |\nu\partial_3^2 v_3| \approx \nu 2 \cdot \frac{3}{2} aU \frac{1}{r^3} = 3aU\nu \frac{1}{r^3}$$

Das bedeutet

$$\nu\|\Delta\mathbf{v}\| \ll \|(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}\|$$

also genau das Gegenteil unserer Annahme.

Eine bessere Näherung ist nach Oseen (1910), dass weit weg von der Kugel gilt

$$\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{u}$$

mit einer kleinen Störung  $\mathbf{u}$ , so dass

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \underbrace{(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}}_{\approx 0}$$

auf folgende Gleichungen führt

$$\mu\Delta\mathbf{u} - \rho(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla p \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0$$

Damit kann man Korrekturterme zur Stokes'schen Formel ableiten. Die Reibungskraft sieht dann folgendermaßen aus

$$\mathbf{F} = -6\pi a\nu\mathbf{U} \left( 1 + \frac{3}{16} Re \right)$$

Diese Formel bestätigt die Experimente bis  $Re \approx 5$ , dann wird auch sie, wie die Stokes'sche Formel ungenau. Der Hauptgrund dafür ist, dass Oseens Näherung in der Nähe der Kugel schlecht ist, da  $\mathbf{u}$  nur weit außen klein ist, wo das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}$  schon große Ähnlichkeit mit  $\mathbf{U}$  besitzt.