Technische Universität München
Theoretische Physik

WS 2005/2006, 30.3.2006

Lösung zur Klausur zur Mechanik der Kontinua (Theoretische Physik 4B)

Prof. J. L. van Hemmen

1. **Flüssigkeit zwischen zwei Platten**

(a) Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\partial_t \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\varrho}\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{v} \tag{1}$$

Wegen Stationarität ist $\partial_t \boldsymbol{v} = 0$. Translationssymmetrie führt zum Ansatz $\boldsymbol{v} = (v_x(z), 0, 0)$. Der Ansatz erfüllt die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \partial_x v_x(z) = 0\,. \tag{2}$$

Eingesetzt in die Navier-Stokes-Gleichungen ergibt sich:

$$0 = -\frac{1}{\varrho}\partial_x p + \nu\partial_{zz} v_x(z) \tag{3}$$

$$0 = -\frac{1}{\varrho}\partial_y p \tag{4}$$

$$0 = -\frac{1}{\varrho}\partial_z p \tag{5}$$

Somit ist wegen (4) und (5) $p = p(x)$. Wegen (3) ist $\partial_x p(x)$ unabhängig von x, also $\partial_x p(x) = \text{const}$. Also $p(x) = Ax + B$. Aufgrund der Randbedingung $p = p_0$ am Plattenrand ist daher $p(x) = p_0$. Eingesetzt in (3) ergibt sich

$$\partial_{zz} v_x(z) = 0 \tag{6}$$

$$v_x(z) = Cz + D \tag{7}$$

Die Randbedingungen $v_x(0) = -v$ und $v_x(d) = v$ ergeben

$$v_x(z) = \frac{2v}{d}z - v\,. \tag{8}$$

Das Geschwindigkeitsfeld ist somit $\boldsymbol{v} = (\frac{2v}{d}z - v, 0, 0)$, das Druckfeld $p = p_0$.

(b) Der Betrag der Kraft pro Oberfläche auf die Platten ist

$$|F_x| = |\eta\partial_z v_x(z)| = \eta\frac{2v}{d}\,. \tag{9}$$

Die Kräfte auf die Platten wirken der Bewegungsrichtung entgegen.

2. **Bewegte Kugel**

Zu prüfen sind die Randbedingungen (senkrechte Projektion von $\boldsymbol{v}$ auf die Normale der Kugeloberfläche muss gleich der senkrechten Projektion von $\boldsymbol{w}$ auf die Normale der Kugeloberfläche sein und $\boldsymbol{v}$ muss im Unendlichen gleich null sein) und die Kontinuitätsgleichung. Die Euler'schen Gleichungen müssen eine Lösung für den Druck besitzen.

(a) Randbedingungen:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = -\text{grad}\,\Phi = \frac{a^3}{2r^5}\left[3(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - r^2\boldsymbol{w}\right] \tag{10}$$

Senkrechte Projektion von $\boldsymbol{v}$ auf die Normale der Kugeloberfläche ($r = a$):

$$\boldsymbol{v}_\perp(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{11}$$

Senkrechte Projektion von $\boldsymbol{w}$ auf die Normale der Kugeloberfläche ($r = a$):

$$\boldsymbol{w}_\perp(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{v}_\perp(\boldsymbol{r}) = \frac{a^3}{2r^5}\left[3(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r})r^2 - r^2(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r})\right]\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{w}_\perp(\boldsymbol{r}) \tag{13}$$

für $r = a$.
Weiter ist $v(\boldsymbol{r}) = 0$ für $r \to \infty$.

(b) Kontinuitätsgleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{a^3}\text{div}\,\boldsymbol{v} &= -\frac{5}{2}\frac{1}{r^7}2x\left[\ldots\right]_x + \frac{1}{r^5}\left[3(2w_x x + w_y y + w_z z) - w_x 2x\right] + \text{zyklisch} = \\
&= -\frac{5}{r^7}\left[3(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r})r^2 - xr^2 w_x - yr^2 w_y - zr^2 w_z\right] + \\
&\quad +\frac{1}{r^5}\left[10w_x x + 10w_y y + 10w_z z\right] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{14}$$

(c) Lösung der Euler-Gleichungen für den Druck: Euler-Gleichungen:

$$\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\varrho}\nabla p \tag{15}$$

Es gilt

$$\nabla\boldsymbol{v}^2 = 2(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{v}\times\text{rot}\,\boldsymbol{v}\,. \tag{16}$$

Somit lauten die Euler-Gleichungen wegen $\boldsymbol{v}_t = 0$ (stationär) und rot $\boldsymbol{v} = -\text{rot grad}\,\Phi = 0$

$$\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{v}^2 = -\frac{1}{\varrho}\nabla p \tag{17}$$

und wegen Inkompressibilität

$$-\frac{1}{2}\nabla(\varrho\boldsymbol{v}^2) = \nabla p\,. \tag{18}$$

Da die linke Seite ein Gradientenfeld ist, existiert eine Lösung für den Druck p.

3. **Hydrodynamisches Paradoxon**

(a) Bernoulli (stationär, inkompressibel, reibungsfrei):

$$\frac{1}{2}\varrho v_0^2 + p_0 = \frac{1}{2}\varrho v(r_0)^2 + p(r_0) = \frac{1}{2}\varrho v(r)^2 + p(r) = \frac{1}{2}\varrho v(R_0)^2 + p_a \tag{19}$$

Kontinuitätsgleichung (inkompressibel):

$$\pi r_0^2 v_0 = 2\pi r_0 d v(r_0) = 2\pi r d v(r) = 2\pi R_0 d v(R_0) \tag{20}$$

Es ergibt sich

$$p(r) = p_a - \frac{\varrho}{8}\left(\frac{v_0 r_0^2}{R_0 d}\right)^2 \left(\frac{R_0^2}{r^2} - 1\right) \tag{21}$$

Nach oben wirkende Kraft auf die untere Platte:

$$F = \int_{r_0}^{R_0} 2\pi r[p_a - p(r)]\,\mathrm{d}r = \tag{22}$$

$$= \varrho\frac{\pi}{8}\left(\frac{v_0 r_0^2}{d}\right)^2 \left[\left(\frac{r_0}{R_0}\right)^2 + 2\ln\left(\frac{R_0}{r_0}\right) - 1\right] \tag{23}$$

(b) Die Platte wird angesaugt, da $p_a - p(r) > 0$ für $r < R_0$, vgl. (21).

4. **Ortung von Stürmen auf dem Ozean**

(a) Gegeben:

$$\omega^2 = kg + (T/\rho)k^3 \tag{24}$$

$$\omega = \sqrt{kg + (T/\rho)k^3}. \tag{25}$$

Gruppengeschwindigkeit:

$$c_g = d\omega/dk = \frac{g + 3(T/\rho)k^2}{2\sqrt{kg + (T/\rho)k^3}}. \tag{26}$$

Phasengeschwindigkeit:

$$c_{ph} = \omega/k = \sqrt{g/k + (T/\rho)k}, \tag{27}$$

Für Gravitationswellen gilt $T \to 0$ und daher

$$c_g = 1/2\sqrt{g/k} \quad , \quad c_{ph} = \sqrt{g/k}. \tag{28}$$

Für Kapillarwellen gilt $g \to 0$ und daher

$$c_g = 3/2\sqrt{T/\rho}\sqrt{k} \quad , \quad c_{ph} = \sqrt{T/\rho}\sqrt{k}. \tag{29}$$

(b) Die Frequenz-Komponente bewegt sich mit der Gruppengeschwindigkeit. Also ist

$$D = c_g t. \tag{30}$$

(c) Wir berechnen die Distanz zweimal:

$$D = c_{g1}(t_1 - t_0) = c_{g2}(t_2 - t_0) \tag{31}$$

$$\to t_0 = t_1 - D/c_{g1} \tag{32}$$

$$\to D = c_{g2}(t_2 - t_1 + D/c_{g1}) \tag{33}$$

$$\to D = \frac{t_2 - t_1}{1/c_{g2} - 1/c_{g1}}. \tag{34}$$

(d)

$$D = \frac{t_2 - t_1}{1/c_{g2} - 1/c_{g1}} \tag{35}$$

Einsetzen:

$$= \frac{\Delta t}{\left(c_{g1} + \Delta\omega \frac{dc_{g1}}{d\omega}\right)^{-1} - 1/c_{g1}}. \tag{36}$$

Taylorentwicklung des ersten Terms im Nenner:

$$= \frac{\Delta t}{\left(1 + \frac{1}{c_{g1}}\Delta\omega\ \frac{dc_{g1}}{d\omega}\right)^{-1}/c_{g1} - 1/c_{g1}} \tag{37}$$

$$= \frac{\Delta t}{\left(1 - \frac{1}{c_{g1}}\Delta\omega\ \frac{dc_{g1}}{d\omega}\right)/c_{g1} - 1/c_{g1}} \tag{38}$$

$$= -c_{g1}\frac{\Delta t}{\Delta\omega}\left(\frac{1}{c_{g1}}\frac{dc_{g1}}{d\omega}\right)^{-1} \tag{39}$$

$$= -c_{g1}/\dot{\omega}\left(\frac{1}{c_{g1}}\frac{dc_{g1}}{d\omega}\right)^{-1}. \tag{40}$$

Zwischenrechung:

$$c_{g1} = 1/2\sqrt{g/k} = g/2\omega \tag{41}$$

$$\rightarrow \frac{1}{c_{g1}}\frac{dc_{g1}}{d\omega} = -\frac{1}{\omega}. \tag{42}$$

Einsetzen ergibt:

$$D = -c_{g1}\omega/\dot{\omega}\,. \tag{43}$$

(e) Von 4d:

$$D = -c_{g1}/\dot{\omega}\left(\frac{1}{c_{g1}}\frac{dc_{g1}}{d\omega}\right)^{-1} \tag{44}$$

Zwischenrechnung:

$$c_{g1} = 3/2\sqrt{T/\rho}\sqrt{k} = 3/2(T/\rho)^{1/6}\omega^{2/3} \tag{45}$$

$$\rightarrow \frac{1}{c_{g1}}\frac{dc_{g1}}{d\omega} = 2/3\omega. \tag{46}$$

Einsetzen ergibt

$$D = -3/2\ c_g\frac{\omega}{\dot{\omega}}. \tag{47}$$

5. **Visco-Kupplung**

(a) Geschwindigkeitsfeld:
Ansatz: $v_r = 0$ und $v_h = 0$.
Es ist $\partial_\phi v_\phi = 0$ wegen Rotationssymmetrie.
Navier-Stokes-Gleichung für die Winkel-Komponente:

$$0 = \nu \left(\partial_r^2 v_\phi + \frac{1}{r} \partial_r v_\phi + \partial_h^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2} \right) \tag{48}$$

Die Lösung

$$v_\phi = \omega r \frac{h}{d} \tag{49}$$

erfüllt die Randbedingungen $v_\phi(h = 0) = 0$ und $v_\phi(h = d) = \omega r$ sowie die Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$.

(b) Drehmoment:

$$\frac{F}{A} = \boldsymbol{\pi n};\ \boldsymbol{n} = (0, 0, 1) \tag{50}$$

$$\frac{F_\phi(r)}{A} = \eta \partial_h v_\phi = \eta \omega r \frac{1}{d} \tag{51}$$

$$M = \int_0^R r \frac{F_\phi(r)}{A} 2\pi r \,\mathrm{d}r = \frac{\pi \eta R^4 \omega}{2d} \tag{52}$$

Die korrigierten Arbeiten sind einzusehen bei Paul Friedel, Raum 3023.