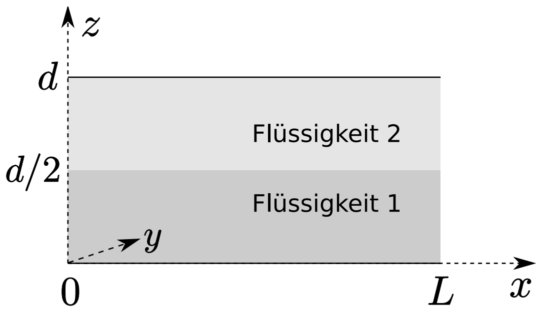
Klausur zur
Mechanik der Kontinua (Theoretische Physik 4B)

Prof. J. L. van Hemmen

Alle Ansätze sind physikalisch zu begründen!

1. **Zwei Flüssigkeiten zwischen zwei Platten** *(19 Punkte)*



Zwischen zwei in y-Richtung unendlich ausgedehnte Platten in der x-y-Ebene mit Abstand d befinden sich zwei inkompressible Newton'sche Flüssigkeiten der Dichte ϱ mit Viskosität μ_1 bzw. μ_2, die jeweils den halben Raum zwischen den Platten ausfüllen, wie in der Skizze. Der Druck im Querschnitt zwischen den Platten an der Stelle $x = 0$ sei $p(0)$, der Druck an der Stelle L gleich $p(L)$.

(a) Welche Randbedingung gilt an der Schicht zwischen den beiden Flüssigkeiten?
Hinweis: Betrachten Sie die Kraft von Flüssigkeit 1 und von Flüssigkeit 2 auf eine unendlich dünne Schicht zwischen den Flüssigkeiten.

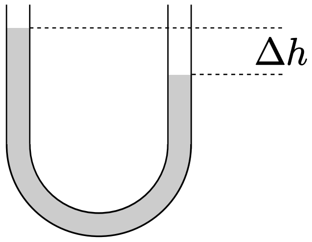
(b) Berechnen Sie das sich im stationären Fall ausbildende Geschwindigkeits- und Druckfeld zwischen den Platten im Bereich $0 < x < L$. Vernachlässigen Sie die Schzwerkraft.
Hinweis: Für die Strömungsgeschwindigkeiten v_{x1} und v_{x2} in x-Richtung in den beiden Flüssigkeits-Bereichen 1 und 2 erweist sich ein Ansatz der Form

$$v_{x1} = A_1 z(z-d) + B_1 z + C_1 \tag{1}$$
$$v_{x2} = A_2 z(z-d) + B_2 z + C_2 \tag{2}$$

als sinnvoll.

(c) Wie groß ist der Volumendurchsatz an Flüssigkeit pro Zeit pro Querschnittsfläche?

2. **Schwingende Wassersäule** *(10 Punkte)*

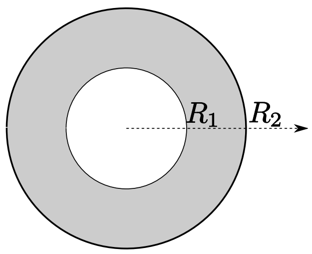


Eine Wassersäule der Dichte ϱ befindet sich, wie in der Skizze gezeigt, in einem U-Rohr mit Querschnitt A, wobei anfangs (zur Zeit $t = 0$) der Höhenunterschied der beiden Flüssigkeitssäulen Δh beträgt.

Wasser soll hier als reibungsfrei und inkompressibel angenommen werden. Gehen Sie davon aus, dass sich eine homogene Strömung ausbildet (konstante Geschwindigkeit in jedem Querschnitt).

Die Auslenkung des Flüssigkeitspegels aus der Ruhelage zum Zeitpunkt t sei $x(t)$. Berechnen Sie $x(t)$. Begründen Sie dabei Ihre Ansätze.

3. **Flüssigkeit zwischen zwei Röhren** *(20 Punkte)*



Zwischen zwei kreisförmigen Röhren der Länge L mit Radien $R_1 < R_2$ befinde sich eine inkompressible Newton'sche Flüssigkeit mit kinematischer Viskosität ν, wie in der Skizze. Die Flüssigkeit wird durch eine Druckdifferenz Δp zwischen den Rohrenden getrieben.

Berechnen Sie das sich im stationären Fall zwischen den Röhren ausbildende Geschwindigkeits- und Druckfeld. Nehmen Sie eine laminare Strömung an und vernachlässigen Sie die Schwerkraft.

Hinweis (Herleitung ist nicht verlangt): Die Navier-Stokes-Gleichungen in (normierten) Zylinderkoordinaten (r, φ, h) (Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}$, Volumenkräfte $\boldsymbol{g}$, Druck p, kinematische Viskosität ν) lauten

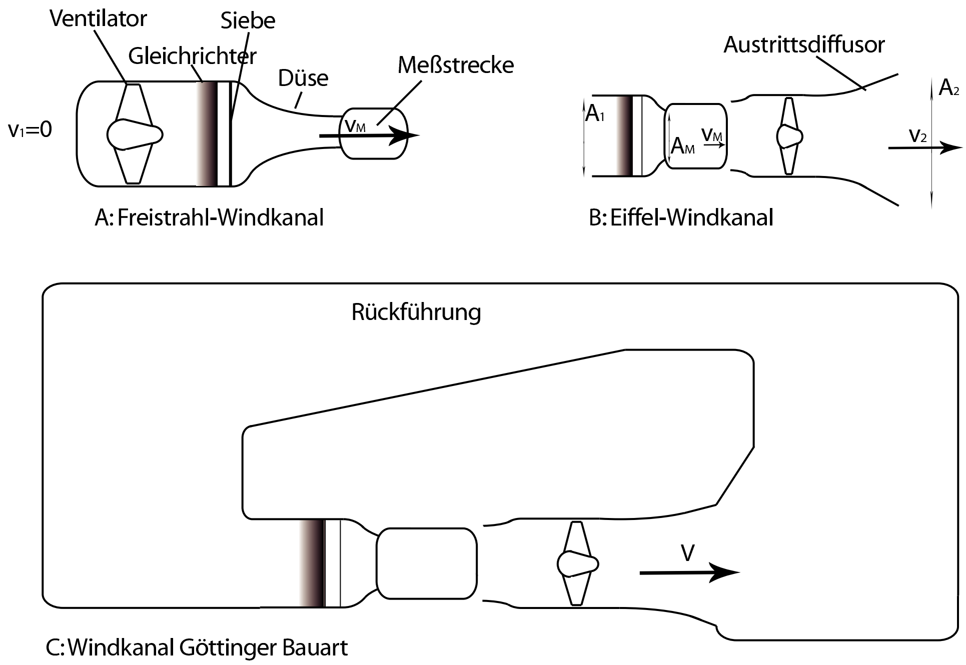
$$\partial_t \boldsymbol{v} + \left(v_r \partial_r + \frac{v_\varphi}{r}\partial_\varphi + v_z \partial_z\right) \begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{v_\varphi^2}{r} \\ \frac{v_r v_\varphi}{r} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{g} - \frac{1}{\varrho} \begin{pmatrix} \partial_r \\ \frac{1}{r}\partial_\varphi \\ \partial_h \end{pmatrix} p + \nu \begin{pmatrix} \partial_r^2 v_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 v_r + \partial_h^2 v_r + \frac{1}{r}\partial_r v_r - \frac{2}{r^2}\partial_\varphi v_\varphi - \frac{v_r}{r^2} \\ \partial_r^2 v_\varphi + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 v_\varphi + \partial_h^2 v_\varphi + \frac{1}{r}\partial_r v_\varphi + \frac{2}{r^2}\partial_\varphi v_r - \frac{v_\varphi}{r^2} \\ \partial_r^2 v_h + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 v_h + \partial_h^2 v_h + \frac{1}{r}\partial_r v_h \end{pmatrix}, \quad (3)$$

die Divergenz lautet

$$\partial_r v_r + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r}\partial_\varphi v_\varphi + \partial_z v_z \,, \qquad (4)$$

4. **Windkanal** *(10 Punkte)*



Windkanäle haben ein Gebläse (Ventilator), welches den Luftstrom erzeugt. Gleichrichter und Siebeinheit machen die Strömung laminar und homogen in den relevanten Rohrquerschnitten. In der Messstrecke befinden sich die zu untersuchenden Objekte. Prinzipiell unterscheidet man drei Arten, siehe Skizze:

- A: Freistrahl-Windkanal
- B: Eiffel-Windkanal
- C: Windkanal Göttinger Bauart (nach Prandtl; vgl. auch die Abbildung in der U-Bahn-Station Garching Forschungsgelände)

Rechnen Sie unter Annahme einer inkompressiblen Strömung.

(a) Die Strömungsgeschwindigkeit in der Messstrecke sei v_M, der Querschnitt der Messstrecke A_M. Wenn die Druckdifferenz zwischen dem Querschnitt unmittelbar nach und unmittelbar vor dem Gebläse Δp beträgt, wie hoch ist dann die Leistungsaufnahme des Gebläses?

(b) Berechnen Sie die Druckdifferenz zwischen dem Querschnitt unmittelbar vor und unmittelbar hinter dem Gebläse für alle drei Windkanaltypen in Abhängigkeit von v_M, A_M und, im Fall C, von A_2. Der Druckverlust durch die Einbauten in der Messstrecke sei $\Delta p_M = a\varrho\frac{v_M^2}{2}$. Ansonsten kann die Strömung *innerhalb der Anordnung* als reibungsfrei, laminar und homogen in jedem Querschnitt angenommen werden. Nahmen Sie im Fall C an, dass die Strömungsgeschwindigkeit nach dem Gebläse sowie beim Eintritt in den Gleichrichter gleich v ist.

5. **Potentialströmung** *(10 Punkte)*

Betrachten Sie das komplexe Strömungspotential

$$W(z) = z^{\frac{4}{3}}\,.$$

(a) Berechnen Sie das komplexe Geschwindigkeitsfeld $F(z)$.

(b) Berechnen Sie das Geschwindigkeitsfeld $\binom{v_1(x,y)}{v_2(x,y)}$.
Hinweis: Verwenden Sie komplexe Polarkoordinaten $z = Ae^{i\varphi}$.

(c) Wo ist der Staupunkt (Stagnationspunkt)?

(d) Berechnen Sie die Stromfunktion.

(e) Skizzieren Sie den Verlauf der Stromlinien im ersten und zweiten Quadranten.

(f) Welcher Körper angeströmt (mit Begründung)?

Übungsleitung: Dr. Moritz Franosch, mail@Franosch.org, http://www.t30.ph.tum.de/.