Klausur zur
Mechanik der Kontinua (Theoretische Physik 4B)

Prof. J. L. van Hemmen

1. **Gegeneinander bewegte Platten** *(14 Punkte)*

   Zwei sehr große dünne Platten parallel zur x-y-Ebene befinden sich im Abstand d voneinander. Dazwischen befindet sich ein inkompressibles Newton'sches Fluid (die Schubspannung ist proportional zur ersten Ableitung der Geschwindigkeit). Die Platten bewegen sich folgendermaßen gegeneinander: Die eine Platte bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v entgegen der x-Richtung, die andere bewegt mit konstanter Geschwindigkeit v in x-Richtung. Der Druck am Rand der Patten sei p_0.

   (a) Berechnen Sie das stationäre Geschwindigkeits- und Druckfeld in der Flüssigkeit (Vernachlässigen Sie Gravitation und Randeffekte).

   (b) Welche Widerstandskraft übt die Flüssigkeit pro Oberfläche auf die bewegten Platten aus?

2. **Bewegte Kugel** *(12 Punkte)*

   In einer reibungsfreien, inkompressiblen Flüssigkeit bewegt sich eine Kugel (Radius a) mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{w}$. Der Mittelpunkt der Kugel sei gerade am Ursprung. Prüfen Sie nach, dass sich im stationären Fall in der Flüssigkeit ein Geschwindigkeitsfeld

   $$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{grad}\, \Phi(\boldsymbol{r})\,, \tag{1}$$

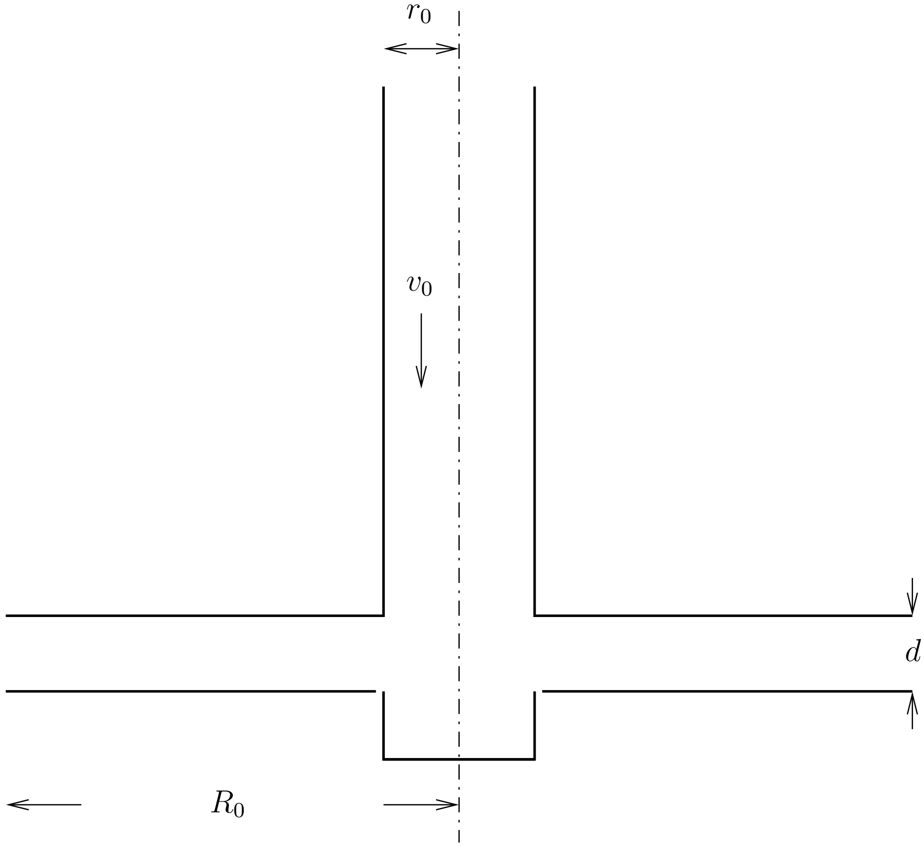
   ausbildet, wobei

   $$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{a^3}{2|\boldsymbol{r}|^3} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{r}\,. \tag{2}$$

   Hinweise: Berücksichtigen Sie dabei auch, dass eine Lösung für den Druck existieren muss. Es ist

   $$\nabla(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times (\nabla \times \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b} \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a}\,. \tag{3}$$

3. **Hydrodynamisches Paradoxon** *(11 Punkte)*



An einer Röhre mit kreisförmigem Querschnitt (Radius r_0) ist ein Kreisring mit Radius R_0 befestigt. Durch die Röhre wird Luft mit der Geschwindigkeit v_0 geblasen, die wie eingezeichnet aus der Röhre in den Spalt zwischen den Kreisringen austritt und an den Rändern der Ringe in die Atmosphäre entweicht (Atmosphärendruck p_a).

(a) Berechnen Sie die Kraft auf den unteren Kreisring. Nehmen Sie eine stationäre inkompressible reibungsfreie laminare Strömung an und vernachlässigen Sie Randeffekte. Nehmen Sie homogene Strömungen in den relevanten Querschnitten an.

(b) Wird der Ring abgestoßen oder angezogen?

4. **Ortung von Stürmen auf dem Ozean** *(12 Punkte)*

Die Dispersionsrelation für Wasserwellen unter Berücksichtigung der Gravitation und der Oberflächenspannung lautet

$$\omega^2 = kg + \frac{Tk^3}{\varrho}\,, \tag{4}$$

wobei ω die Frequenz, k die Wellenzahl, T die Oberflächenspannung und ϱ die Dichte sind.

(a) Berechnen Sie die Gruppengeschwindigkeit c_g und die Phasengeschwindigkeit c_{ph}. Wie lauten c_g und c_{ph} für Spezialfälle reiner Gravitations- und reiner Kapillarwellen?

(b) Wir betrachten eine Störung der Wasseroberfläche („Sturm") zur Zeit $t = t_0$ und an der Stelle $r = r_0$. Die Störung löst ein Wellenpaket aus, das sich radial in alle Richtungen fortpflanzt.
Mit welcher Geschwindigkeit breitet sich eine Komponente des Pakets mit konstanter Wellenzahl k aus?
Wie groß ist also die zurückgelegte Distanz D nach einer Zeit t?

(c) Auf einem Forschungsschiff in einer festen aber unbekannten Distanz D zur ursprünglichen Störung messen die Wissenschaftler zu zwei verschiedenen Zeitpunkten (t_1 und t_2) die Geschwindigkeit des vorbeikommenden Wellenzuges. Zeigen Sie, dass für D gilt

$$D = \frac{t_2 - t_1}{1/c_{g_2} - 1/c_{g_1}}\,. \tag{5}$$

(d) Wenn $\Delta t = t_2 - t_1$ sehr klein ist, unterscheiden sich die Frequenzen und Geschwindigkeiten der vorbeikommenden Wellenkomponenten kaum. Wir können also annähernd schreiben

$$c_{g_2}(\omega) = c_{g_1}(\omega + \Delta\omega) \approx c_{g_1}(\omega) + \Delta\omega \frac{\mathrm{d}c_{g_1}(\omega)}{\mathrm{d}\omega} \tag{6}$$

mit dem Frequenzunterschied $\Delta\omega$.
Wir betrachten jetzt reine Gravitationswellen. Zeigen Sie, dass im Limes $\Delta t \to 0$, $\Delta\omega \to 0$, $\Delta t/\Delta\omega \to 1/\dot{\omega}$ für die Distanz gilt

$$D = c_g \frac{\omega}{\dot{\omega}}. \tag{7}$$

Die Wissenschaftler können den Abstand zum Sturm also berechnen, indem sie die Frequenz (und damit auch $c_g(\omega)$) und die Frequenzmodulation $\dot{\omega}/\omega$ einer vorbeikommenden Wellenkomponente messen.

(e) Manche Fische verwenden möglicherweise die obige Methode, um ihre Beute auf der Wasseroberfläche zu orten, allerdings sind Kapillarwellen in diesem Fall dominant. Wie sieht der Ausdruck für die Distanz D aus, wenn Kapillarwellen *anstatt* Gravitationswellen vorliegen?

5. **Visco-Kupplung** *(15 Punkte)*

Zwei parallele Kreisscheiben (Radius R) mit kollinearen Achsen befinden sich im Abstand d ($d \ll R$). Dazwischen ist ein viskoses inkompressibles Fluid. Die eine Scheibe rotiert mit Winkelgeschwindigkeit ω, die andere ruht.

(a) Berechnen Sie das stationäre Geschwindigkeitsfeld im Fluid (ohne Gravitation und unter Vernachlässigung von Randeffekten an den Rändern der Scheiben).

(b) Welches Drehmoment wird auf die rotierende Scheibe ausgeübt?

Hinweis (Herleitung ist nicht verlangt): Die Navier-Stokes-Gleichungen in (normierten) Zylinderkoordinaten (r, φ, h) (Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}$, Volumenkräfte $\boldsymbol{g}$, Druck p, kinematische Viskosität ν) lauten

$$
\partial_t \boldsymbol{v} + \left(v_r\partial_r + \frac{v_\varphi}{r}\partial_\varphi + v_z\partial_z\right)\begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{v_\varphi^2}{r} \\ \frac{v_r v_\varphi}{r} \\ 0 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \boldsymbol{g} - \frac{1}{\varrho}\begin{pmatrix} \partial_r \\ \frac{1}{r}\partial_\varphi \\ \partial_h \end{pmatrix} p + \nu \begin{pmatrix} \partial_r^2 v_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 v_r + \partial_h^2 v_r + \frac{1}{r}\partial_r v_r - \frac{2}{r^2}\partial_\varphi v_\varphi - \frac{v_r}{r^2} \\ \partial_r^2 v_\varphi + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 v_\varphi + \partial_h^2 v_\varphi + \frac{1}{r}\partial_r v_\varphi + \frac{2}{r^2}\partial_\varphi v_r - \frac{v_\varphi}{r^2} \\ \partial_r^2 v_h + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 v_h + \partial_h^2 v_h + \frac{1}{r}\partial_r v_h \end{pmatrix}, \quad (8)
$$

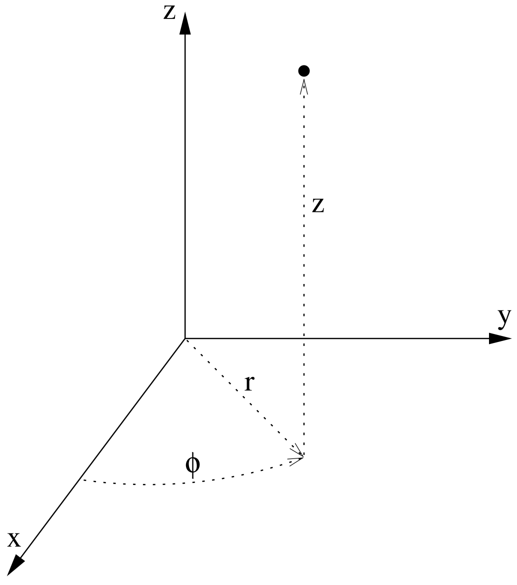
die Divergenz lautet

$$
\partial_r v_r + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r}\partial_\varphi v_\varphi + \partial_z v_z\,, \quad (9)
$$

der Spannungstensor (dynamische Viskosität η) lautet

$$
\pi = \begin{pmatrix} -p + 2\eta\partial_r v_r & \eta\left(\frac{1}{r}\partial_\varphi v_r + \partial_r v_\varphi - \frac{1}{r}v_\varphi\right) & \eta\left(\partial_r v_z + \partial_z v_r\right) \\ & -p + 2\eta\left(\frac{1}{r}\partial_\varphi v_\varphi + \frac{1}{r}v_r\right) & \eta\left(\partial_z v_\varphi + \frac{1}{r}\partial_\varphi v_z\right) \\ & & -p + 2\eta\partial_z v_z \end{pmatrix} \quad (10)
$$

(nicht angegebene Matrixelemente sind symmetrisch).



Übungsleitung: Moritz Franosch, mail@Franosch.org, http://www.physik.tu-muenchen.de/lehrstuehle/T35/.